UFR de Sciences Économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

L3-S5 - Economie & Gestion

Statistique & Probabilités

Corrigé du Contrôle Continu n° 1

Durée 1h30 - Année universitaire 2023 - 2024

Exercice 1 : **(Barème de notation : chaque question est notée sur 1.25 pt = 5 pts)**

Soient A et B deux événements non vides tels que $P(A) = \frac{1}{3}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$

1) A et B sont des événements indépendants en probabilité $\Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A)P(B) = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 66.67\%$$

$$P[(A-B)\cup(B-A)] = P(A\triangle B) = P(A)+P(B)-2P(A\cap B) = P(A)+P(B)-2P(A)P(B)$$
$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

2) L'événement A est inclus dans l'événement B : $A\subset B \Rightarrow A\cap B = A \Rightarrow P(A\cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$.

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P[(A-B)\cup(B-A)] = P(A\triangle B) = P(A)+P(B)-2P(A\cap B) = P(A)+P(B)-2P(A)$$
$$= P(B)-P(A) = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 16.67\%.$$

3) A et B sont des événements incompatibles $\Leftrightarrow A\subset B \Rightarrow A\cap B = \phi \Rightarrow P(A\cap B) = P(\phi) = 0$.

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = P(A)+P(B) = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6} = 83.33\%$$

$$P[(A-B)\cup(B-A)] = P(A\triangle B) = P(A)+P(B)-2P(A\cap B) = P(A)+P(B)$$
$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6} = 83.33\%.$$

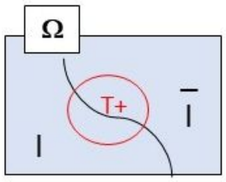
4) la probabilité $P(A/B) = \frac{1}{2} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{2}P(B) = \frac{1}{4}$.

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = P(A)+P(B)-\frac{1}{2}P(B) = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{7}{12} = 58.33\%$$

$$P[(A-B)\cup(B-A)] = P(A\triangle B) = P(A)+P(B)-2P(A\cap B) = P(A)+P(B)-2\frac{1}{2}P(B)$$
$$= P(A) = \frac{1}{3} = 33.33\%.$$

*************** °°° ****************

Exercice 2 : **(Barème de notation : chaque question est notée sur 1 pt = 5 pts)**



On note les événements suivants :

I : le conducteur est en Infraction ; $P(I) = \frac{1}{1000} = 0.001 = 0.1\%$

$\bar{I}$: le conducteur n'est pas en Infraction ; $P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 99.90\%$

T^+ : le test est Positif ; $P(T^+/I) = 99\%$ et $P(T^+/\bar{I}) = 0.0002 = 0.02\%$

1) La probabilité quun conducteur ne soit pas en Infraction et testé Négatif :

$$P(\bar{I} \cap T^-) = P(T^-/\bar{I})P(\bar{I}) = (1 - P(T^+/\bar{I}))(1 - P(I)) = (1 - 0.0002) \times (1 - 0.001)$$
$$= 0.9998 \times 0.9990 = 99.88\%.$$

2) La probabilité qu'un conducteur soit testé Positif :

$$P(T^+) = P(T^+/I)P(I) + P(T^+/\bar{I})P(\bar{I}) = 0.99 \times 0.001 + 0.0002 \times 0.999 = 0.0012 = 0.12\%.$$

3) La probabilité qu'un conducteur testé Positif, soit réellement en Infraction :

$$P(I/T^+) = \frac{P(I \cap T^+)}{P(T^+)} = \frac{P(T^+/I)P(I)}{P(T^+/I)P(I) + P(T^+/\bar{I})P(\bar{I})} = \frac{0.99 \times 0.001}{0.0012} = 82.50\%.$$

Ou encore, on peut appliquer directement la formule de Bayes. Tout ensemble M et son complémentaire $\bar{I}$ forment une partition de Ω.

$$P(I/T^+) = \frac{P(I \cap T^+)}{P(T^+)} = \frac{P(T^+/I)P(I)}{P(T^+/I)P(I) + P(T^+/\bar{I})P(\bar{I})} = \frac{0.99 \times 0.001}{(0.99 \times 0.001 + 0.0002 \times 0.999)} = 82.50\%.$$

4) La probabilité qu'un conducteur testé Positif, ne soit pas en Infraction (faux-positif) :

$$P(\bar{I}/T^+) = 1 - P(I/T^+) = 17.50\%$$

5) La probabilité qu'un conducteur testé Négatif, soit quand même en Infraction (faux-négatif) :

$$P(I/T^-) = \frac{P(I \cap T^-)}{P(T^-)} = \frac{P(T^-/I)P(I)}{P(T^-)} = \frac{0.01 \times 0.001}{0.9988} = 0.00001 = 0.001\% \simeq 0.$$

Sachant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \mathrm{P}(\mathrm{T}^-/I) = 1 - P(T^+/I) = 1 - 0.99 = 0.01 = 1\% \\ \mathrm{P}(\mathrm{T}^+) = P(T^+/I)P(I) + P(T^+/\bar{I})P(\bar{I}) = 0.0012 = 0.12\% \\ \mathrm{P}(\mathrm{T}^-) = 1 - P(T^+) = 1 - 0.0012 = 0.9988 = 99.88\% \end{cases}$$

*************** °°° ***************

Exercice 3 : **(Barème de notation : 1) 2 pts 2) 1.5 pt 3) 3 pts 4) 1.5 pt 5) 2 pts = 10 pts)**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 0 \\ 1-(2x+1)e^{-2x} & si\ x\ \geq\ 0 \end{cases}$$

1) Calcul des probabilités :

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 5e^{-4} = 9.16\%.$
$P(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) = 3e^{-2} - 5e^{-4} = 31.44\%.$
$P[(X > 1)/(X < 2)] = \frac{P[(X>1)\cap(X<2)]}{P(X<2)} = \frac{P(1<X<2)}{P(X\leq 2)} = \frac{F(2)-F(1)}{F(2)} = \frac{3e^{-2}-5e^{-4}}{1-5e^{-4}} = 34.61\%$
$P[(X > 1) - (X < 2)] = P[(X > 1) \cap \overline{(X < 2)}] = P(X \geq 2) = 1 - F(2) = 5e^{-4} = 9.16\%$

2) Fonction densité de probabilité f de X :

si $x < 0 : f(x) = 0.$
si $x \geq 0 : f(x) = (1-(2x+1)e^{-2x})' = -2e^{-2x} + (-(2x+1)(-2e^{-2x})$
$= -2e^{-2x} + 2(2x+1)e^{-2x} = 4xe^{-2x}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 0 \\ 4xe^{-2x} & si\ x\ \geq\ 0 \end{cases}$$

3) Espérance mathématique E(X) et variance V(X) de X :

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} 4x^2e^{-2x}dx.$

Intégration par parties de $\int_0^{+\infty} 4xe^{-2x}dx$: $\begin{cases} u = 4x^2 & \Rightarrow\ u' = 8x \\ v' = e^{-2x} & \Leftarrow\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$

$E(X) = [-\frac{4}{2}x^2e^{-2x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 4xe^{-2x}dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$, car f est une fonction densité de probabilité.

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = \int_0^{+\infty} 4x^3e^{-2x}dx.$

Intégration par parties de $\int_0^{+\infty} 4x^2e^{-2x}dx$: $\begin{cases} u = 4x^3 & \Rightarrow\ u' = 12x^2 \\ v' = e^{-2x} & \Leftarrow\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$

$E(X^2) = [-\frac{4}{2}x^3e^{-2x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{12}{2}x^2e^{-2x}dx = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} 4x^2e^{-2x}dx = \frac{3}{2}E(X) = \frac{3}{2}.$
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}.$

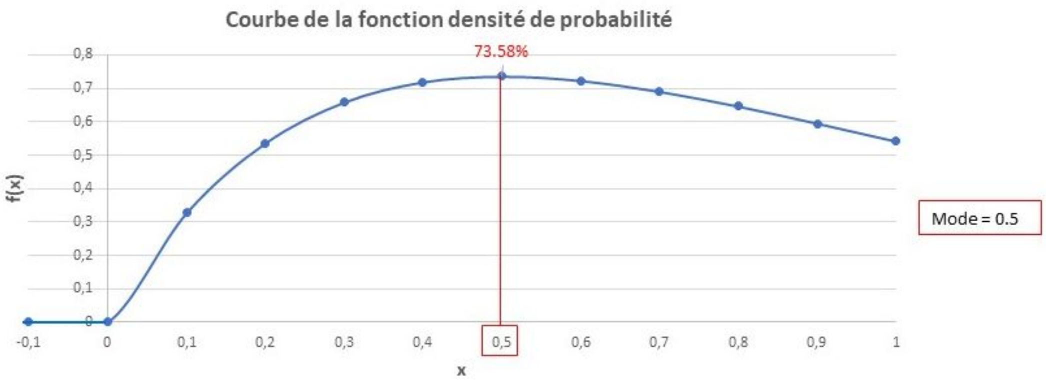
4) Valeur modale de X :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 0 \\ 4xe^{-2x} & si\ x\ \geq\ 0\ \ avec\ \ k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le mode x_0 correspond à la valeur qui annule la dérivée de la fonction densité de probabilité f.
On cherche $x_0 \geq 0$ tel que $f'(x_0) = 0$

$f'(x_0) = (4x_0e^{-2x_0})' = 4e^{-2x_0} - 8x_0e^{-2x_0} = 0 \Rightarrow 2x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
f(x)	0	0,32749	0,53626	0,65857	0,71893	0,73576	0,72287	0,6905	0,64607	0,59508



5) Soit G la fonction de répartition de la v.a.r. $Y = e^{-2X}$. Probabilité $P(Y \leq \frac{1}{2}) = G(2)$:

On note $Y = e^{-2X}$ la variable aléatoire réelle de fonction de répartition G.

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(e^{-2X} \leq y)$$

$$G(y) = \begin{cases} 0 & si\ y < 0 \\ P(-2X \leq lny) = P(X \geq -\frac{lny}{2}) = 1 - F(-\frac{lny}{2}) & si\ y \geq 0 \end{cases}$$

Sachant que : F(x) = P(X $\leq x$) $= \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1-(2x+1)e^{-2x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

Si $y \geq 0 \Rightarrow G(y) = 1 - F(-\frac{lny}{2})$

Si $0 \leq y \leq 1 \Rightarrow -\frac{lny}{2} > 0 \Rightarrow F(-\frac{lny}{2}) = 1 - y(1-lny)$

$\Rightarrow G(y) = 1 - F(-\frac{lny}{2}) = (1-lny)y$

Si $y > 1 \Rightarrow -\frac{lny}{2} < 0 \Rightarrow F(-\frac{lny}{2}) = 0$

$\Rightarrow G(y) = 1 - F(-\frac{lny}{2}) = 1$

Fonction de répartition :

$$G(y) = \begin{cases} 0 & si\ \ y < 0 \\ (1-lny)y & si\ \ 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & si\ \ y > 1 \end{cases}$$

$$P(Y \leq \tfrac{1}{2}) = G(\tfrac{1}{2}) = (1 - ln\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{2} = 84.66\%$$

*************** °°° ***************