

L3-S5 - Economie & Gestion

Statistique & Probabilités

Corrigé du Contrôle Continu n° 1

Durée 1h30 - Année universitaire 2024 - 2025

Exercice 1 : (Barème de notation : chaque question est notée sur 0.5 pt = 3 pts)

Événements : C - le véhicule a un défaut de carrosserie et M - le véhicule a un défaut moteur.

$$P(C) = 10\% ; P(M) = 15\% ; P(\overline{C} \cap \overline{M}) = P(\overline{C \cup M}) = 80\%$$

1) Probabilité que le véhicule présente un défaut pour au moins un des deux contrôles carrosserie ou moteur :

$$P(C \cup M) = 1 - P(\overline{C \cup M}) = 1 - 0.80 = 20\%$$

2) Probabilité que le véhicule présente un défaut pour les deux contrôles carrosserie et moteur :

$$P(C \cap M) = P(C) + P(M) - P(C \cup M) = 0.10 + 0.15 - 0.20 = 5\%$$

3) Probabilité que le véhicule présente un défaut pour un seul des deux contrôles :

$$P[(C \cap \overline{M}) \cup (M \cap \overline{C})] = P(C \cap \overline{M}) + P(M \cap \overline{C})$$

les 2 événements sont disjoints.

$$= P(C) - P(C \cap M) + P(M) - P(C \cap M)$$

$$= 0.10 + 0.15 - 2 \times 0.05 = 15\%$$

4) Probabilité que le véhicule présente un défaut pour le contrôle carrosserie sachant qu'il présente un défaut pour le contrôle moteur :

$$P_M(C) = P(C/M) = \frac{P(M \cap C)}{P(M)} = \frac{0.05}{0.15} = 33.33\%$$

5) Probabilité que le véhicule présente un défaut pour le contrôle Moteur sachant qu'il ne présente pas de défaut pour le contrôle Carrosserie :

$$P_{\overline{C}}(M) = P(M/\overline{C}) = \frac{P(M \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(M) - P(M \cap C)}{1 - P(C)} = \frac{0.15 - 0.05}{0.90} = 11.11\%$$

6) Incompatibilité et indépendance en probabilité :

Incompatibilité - Disjoints $\Leftrightarrow C \cap M = \emptyset$

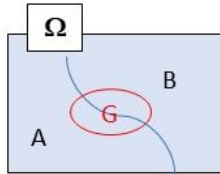
$-P(M \cap C) = 5\% \Rightarrow M \cap C \neq \emptyset$, les événements sont donc compatibles.

Indépendance en probabilité $\Leftrightarrow P(M \cap C) = P(M) \times P(C)$

$-P(M \cap C) = 5\% \neq P(M) \times P(C) = 0.10 \times 0.15 = 1.5\%$, les événements sont donc dépendants en probabilité.

***** ○ ○ ○ *****

Exercice 2 : (Barème de notation : chaque question est notée sur 1 pt = 5 pts)



Les données :

A : le patient a suivi le traitement A ; $P(A) = 75\%$

B : le patient a suivi le traitement B ; $P(B) = 25\%$

G : le patient est guéri.

$$P(G/A) = 80\% \Rightarrow P(\bar{G}/A) = 20\%.$$

$$P(G/B) = 90\% \Rightarrow P(\bar{G}/B) = 10\%.$$

1) Probabilité qu'un patient ait suivi le traitement A et soit guéri :

$$P(A \cap G) = P(G/A)P(A) = 0.8 \times 0.75 = 60\%$$

2) Probabilité qu'un patient soit guéri :

$$\begin{aligned} P(G) &= P[(G \cap A) \cup (G \cap B)] = P(G/A)P(A) + P(G/B)P(B) \\ &= 0.8 \times 0.75 + 0.9 \times 0.25 = 82.50\% \end{aligned}$$

3) Probabilité qu'un patient ait suivi le traitement A ou le traitement B et ne soit pas guéri :

$$\begin{aligned} P[(A \cup B) \cap \bar{G}] &= P[(A \cap \bar{G}) \cup (B \cap \bar{G})] = P(\bar{G}/A)P(A) + P(\bar{G}/B)P(B) \\ &= 0.2 \times 0.75 + 0.10 \times 0.25 = 17.50\% = P(\bar{G}) \end{aligned}$$

Sachant que $P(\bar{G}/A) = 1 - P(G/A) = 20\%$ et $P(\bar{G}/B) = 1 - P(G/B) = 10\%$.

4) Probabilité que le patient ait suivi le traitement A sachant qu'il est guéri :

$$P(A/G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{P(G/A)P(A)}{P(G)} = \frac{0.8 \times 0.75}{0.825} = 0.7273 = 72.73\%$$

5) Probabilité que le patient ait suivi le traitement B sachant qu'il n'est pas guéri :

$$P(B/\bar{G}) = \frac{P(B \cap \bar{G})}{P(\bar{G})} = \frac{P(\bar{G}/B)P(B)}{P(\bar{G})} = \frac{0.10 \times 0.25}{0.1750} = 0.1429 = 14.29\%$$

Exercice 3 : (Barème de notation : 1) 2.5 pts 2) 1.5 pt 3) 3 pts 4) 3 pts 5) 2 pts = 12 pts)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (1-x)^4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1) Calcul des probabilités :

$$P(X > 0.2) = 1 - P(X \leq 0.2) = 1 - F(0.2) = (1 - 0.2)^4 = 0.4096 = 40.96\%.$$

$$P(X < 0.5) = P(X \leq 0.5) = F(0.5) = 1 - (1 - 0.5)^4 \\ = 1 - 0.5^4 = 0.9375 = 93.75\%.$$

$$P(0.2 < X < 0.5) = F(0.5) - F(0.2) = 0.9375 - 0.5904 = 0.3471 = 34.71\%$$

$$P_{(X>0.2)}(X < 0.5) = P[(X < 0.5)/(X > 0.2)] = \frac{P[(X < 0.5) \cap (X > 0.2)]}{P((X > 0.2))} \\ = \frac{P(0.2 < X < 0.5)}{(1 - P(X \leq 0.2))} = \frac{F(0.5) - F(0.2)}{1 - F(0.2)} \\ = \frac{0.3461}{0.4096} = 0.8474 = 84.74\%.$$

$$P(X = 0.2) \approx 0\%.$$

2) La consommation hebdomadaire médiane de fioul :

On cherche x_0 la consommation médiane telle que :

$$P(X \leq x_0) = 0.5 \Rightarrow F(x_0) = 1 - (1 - x_0)^4 = 0.5 \\ \Rightarrow (1 - x_0)^4 = 0.50 \Rightarrow x_0 = 1 - \sqrt[4]{0.5} \\ \Rightarrow x_0 = 0.159103 = 1591.03 \text{ litres.}$$

3) Fonction densité de probabilité de la consommation hebdomadaire :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (1-x)^4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 4(1-x)^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \\ f(x) = \begin{cases} 4(1-x)^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

4.1) Consommation hebdomadaire moyenne de fioul :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 4 \int_0^1 x(1-x)^3 dx$$

Intégration par parties - On pose : $u = x \Rightarrow u' = 1$
 $v' = (1-x)^3 \Leftarrow v = -\frac{(1-x)^4}{4}$

$$E(X) = 4 \left[-\frac{x(1-x)^4}{4} \right]_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{(1-x)^4}{4} dx = \left[-\frac{(1-x)^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5} = 2000 \text{ litres.}$$

4.2) Variance de la consommation hebdomadaire de fioul :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 4 \int_0^1 x^2 (1-x)^3 dx$$

Intégration par parties - On pose : $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$
 $v' = (1-x)^3 \Leftarrow v = -\frac{(1-x)^4}{4}$

$$E(X^2) = 4\left[-\frac{x^2(1-x)^4}{4}\right]_0^1 + 2\int_0^1 x(1-x)^4 dx = 2\int_0^1 x(1-x)^4 dx$$

Intégration par parties - On pose : $u = x \Rightarrow u' = 1$
 $v' = (1-x)^4 \Leftarrow v = -\frac{(1-x)^5}{5}$

$$E(X^2) = 2\left[-\frac{x(1-x)^5}{5}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{(1-x)^5}{5} dx = 2\left[-\frac{(1-x)^6}{30}\right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{15} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{2}{75} = 266.67 \text{ litres}^2.$$

5) Capacité de la cuve pour que la probabilité d'épuiser l'approvisionnement mensuel soit inférieure ou égale à 5% :

Soit x_0 la capacité du réservoir :

$$\begin{aligned} P(X > x_0) \leq 0.05 &\Rightarrow 1 - P(X \leq x_0) \leq 0.05 \Rightarrow P(X \leq x_0) = F(x) \geq 0.95 \\ &\Rightarrow F(x_0) = 1 - (1-x_0)^4 \geq 0.95 \\ &\Rightarrow (1-x_0)^4 \leq 0.05 \Rightarrow x_0 \geq 1 - \sqrt[4]{0.05} \\ &\Rightarrow x_0 \geq 0.52713 = 5271.30 \text{ litres.} \end{aligned}$$
