UFR de sciences économiques et de gestion — Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

L3-S5 - Economie & Gestion

Corrigé du Contrôle Continu n° 1 - Statistique & Probabilités

Durée 1h30 - Année universitaire 2025 - 2026

Exercice 1 : **(Barème de notation : chaque question est notée sur 1.25 pt = 5 pts)**

Les données : $P(A) = P(B) = 10\%$. Les déréglements des machines sont indépendants en probabilité.

Les événements D : "la pièce est défectueuse" , A : "la machine A est déréglée" et B : "la machine B est déréglée".

1) Probabilité qu'une pièce soit défectueuse :

$D = (A \cap \overline{B})) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = A \cup B.$

$P(D) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.1 + 0.1 - 0.1 \times 0.1 = 19\%$

Car les déréglements des machines sont indépendants en probabilité : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

2) Probabilités qu'il y ait 0, 1 ou 2 machines en pannes :

Les déréglements des machines sont indépendants en probabilité : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ alors,

$$a)\ \mathrm{p}_0 = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$
$$= 1 - 0.1 - 0.1 + 0.1 \times 0.1 = 0.81 = 81\%$$

$$b) p_1 = P[(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})] = P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.1 + 0.1 - 2 \times 0.1 \times 0.1 = 0.18 = 18\%$$

$$c) p_2 = P[(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.1 \times 0.1 = 0.01 = 1\%$$

Remarque : si on note X la variable aléatoire réelle associée au nombre de machines déréglées parmi les 2 machines. $X \to B(n;p)$: 2 résultats possibles (déréglée / non déréglée) avec une probabilité $p = q = \frac{1}{2}$ avec des expériences indépendantes.

$X \to B(n = 2, p = 10\%)$ Distribution de probabilité : $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ $k = 0, 1, n = 2.$

$P(X = 0) = q^2 = (1-p)^2 = 81\%$; $P(X = 1) = 2pq = 2p(1-p) = 18\%$; $P(X = 2) = p^2 = 1\%.$

3) Sachant que la pièce fabriquée est défectueuse :

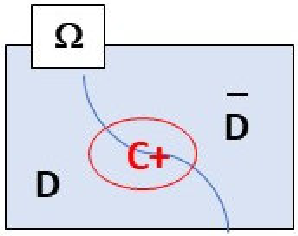
a) la probabilité pour que ce soit dû à une et une seule machine :

$$P_D[(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})] = \frac{P([(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})]\cap D)}{P(D)} = \frac{P((A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}))}{P(D)} = \frac{p_1}{P(D)} = \frac{0.18}{0.19} = 94.74\%$$

b) la probabilité pour que ce soit dû aux deux machines :

$$p_D(A \cap B) = \frac{P(A\cap B\cap D)}{P(D)} = \frac{P(A\cap B)}{P(D)} = \frac{p_2}{P(D)} = \frac{0.01}{0.19} = 5.26\%$$

4) Probabilité qu'une machine soit réellement déréglée sachant que le système de contrôle l'indique comme déréglée :



Les données :
$P(C+/\overline{D}) = 5\%$ et $P(C-/D) = 5\% \Rightarrow P(C^+/D) = 0.95$
$P(D) = 10\%$ et $P(\overline{D}) = 90\%$
C+ : "le contrôle est positif" , D : "la machine est déréglée".

Les événements D et $\overline{D}$ forment un système complet de Ω.
On applique la formule de Bayes :
$$P(C+) = P(C+/D)P(D) + P(C+/\overline{D})P(\overline{D}) = 0.95 \times 0.10 + 0.05 \times 0.90 = 0.14 = 14\%$$
On a alors, $P_{C+}(D) = P(D/C+) = \frac{P(D \cap C+)}{P(C+)} = \frac{P(C+/D)P(D)}{P(C+)} = \frac{0.95 \times 0.10}{0.14} = 67.86\%$.

*************** °°° ***************

Exercice 2 : **(Barème de notation : chaque question est notée sue 1 pt = 4 pts)**

Les données : P(T) = 2% ; $P(O \cap \overline{T}) = 1\%$; $P(T \cap O) = 5\%$

1) Probabilité de l'erreur O :
$$P(O \cap \overline{T}) = P(O) - P(T \cap O) \Rightarrow P(O) = P(O \cap \overline{T}) + P(T \cap O) = 0.01 + 0.05 = 6\%.$$

2) Probabilité de n'avoir ni l'erreur T ni l'erreur O :
$$P(\overline{T} \cap \overline{O}) = P(\overline{T \cup O}) = 1 - P(T \cup O) = 1 - 0.03 = 97\%$$
$avec$ $P(T \cup O) = P(T) + P(O) - P(T \cap O) = 0.02 + 0.06 - 0.05 = 3\%$

3) Indépendants en probabilité des événements T et O :
$P(T \cap O) = 5\% \neq P(T) \times P(O) = 0.02 \times 0.06 = 0.12\% \Rightarrow$ les 2 événements ne sont pas indépendants en probabilité.

4) Calcul des probabilités conditionnelles :
- probabilité d'avoir l'erreur T sachant qu'on a l'erreur O :
$$P(T/O) = \frac{P(T \cap O)}{P(O)} = \frac{0.05}{0.06} = 83.33\%$$
- probabilité d'avoir l'erreur O sachant qu'on a pas l'erreur T :
$$P(O/\overline{T}) = \frac{P(O \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(O \cap \overline{T})}{1 - P(T)} = \frac{0.01}{0.98} = 1.02\%$$

*************** °°° ***************

Exercice 3 : **(Barème de notation : 1) 1.5 pt 2) 1.5 pt 3) 1.5 pt 4) 3 pts 5) 2 pts 6) 1.5 pts = 11 pts)**

On note X la variable aléatoire réelle dont la fonction densité de probabilité f est définie par :
$$f(x) = \begin{cases} kx(2-x) & si \;\; 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1) Valeur unique de la constante k pour que f soit une fonction densité de probabilité de X :

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \geq 0 \Rightarrow kx(2-x) \geq 0$ si $x \in [0,2] \Rightarrow k \geq 0$.

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 = k\int_0^2 x(2-x)dx = k[x^2 - x^3/3]_0^2 = k(4-8/3) = 4k/3 \Rightarrow k = 3/4$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{4}(2-x) & si\ \ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2) Fonction de répartition F de X :

si $x < 0$, alors $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0$.

si $0 \leq x \leq 2$ alors $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^x f(x)dx = 0 + \frac{3}{4}\int_0^x x(2-x)dx$
$= 0 + \frac{3}{4}[x^2 - \frac{x^3}{3}]_0^x = \frac{3x^2}{4}(1-\frac{x}{3})$.

si $x < 0$, alors $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^x f(x)dx$
$= 0 + 1 + 0 = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 0 \\ \frac{3x^2}{4}(1-\frac{x}{3}) & si\ \ 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & si\ \ x > 2. \end{cases}$$

3) Calcul des probabilités :

$$\begin{aligned} P[(1 < X \leq 2) \cup (X \leq 1)] &= P[(1 < X \leq 2)] + P(X \leq 1) - P((1 < X \leq 2) \cap (X \leq 1)) \\ &= P[(1 < X \leq 2)] + P(X \leq 1) = F(2) - F(1) + F(1) = F(2) = 100\%. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(|X+1| \geq 1) &= 1 - P(|X+1| \leq 1) = 1 - P(-1 \leq X+1 \leq 1) = 1 - P(-2 \leq X \leq 0) \\ &= 1 - [F(0) - F(-2)] = 100\%, \text{ avec } F(0) = F(-2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{(X>1)}((1 \leq X < 2) &= P[(1 \leq X < 2)/(X > 1)] = \frac{P[(1 \leq X < 2) \cap (X > 1)]}{1-F(1)} \\ &= \frac{P(1 < X < 2)}{1-F(1)} = \frac{F(2)-F(1)}{1-F(1)} = \frac{1-0.5}{1-0.5} = 100\% \quad \text{avec } F(2) = 1 \text{ et } F(1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4) Espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{3}{4}\int_0^2 x2(2-x)dx = \frac{3}{4}\int_0^2 (2x^2 - x^3)dx = \frac{3}{4}[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4})]_0^2 = \frac{3}{4}(\frac{16}{3} - 4)) = 1.$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - 1$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{3}{4}\int_0^2 x^3(2-x)dx = \frac{3}{4}\int_0^2 (2x^3 - x^4)dx = \frac{3}{4}[\frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{5})]_0^2 = \frac{3}{4}(8 - \frac{32}{5}) = \frac{6}{5}.$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}.$$

5) Médiane et Mode de X :

On cherche x_1 la médiane de X telle que :

$P(X \leq x_1) = 0.5 \Rightarrow F(x_1) = \frac{3x_1^2}{4}(1 - \frac{x_1}{3}) = 0.5 \Rightarrow x_1 = 1$.

On cherche x_2 le Mode de X, la valeur qui annule la dérivée de la fonction densité f :

$f'(x_2) = 0 \Rightarrow (\frac{4x_2}{3}(2-x_2))' = \frac{3(1-x_2)}{2} = 0 \Rightarrow x_2 = 1$

6) Fonction de répartition notée G, associée à la variable aléatoire réelle $Y = 2 - X$:

G(Y) = P(Y $\leq y) = P(2 - X \leq y) = P(X \geq 2 - y) = 1 - P(X \leq 2 - y) = 1 - F(2 - y)$.

$$G(y) = \begin{cases} 1 - 0 & si \;\; 2 - y < 0 \Rightarrow y > 2 \\ 1 - \frac{3(2-y)^2}{4}\left(\frac{(1-y)}{3}\right) = & si \;\; 0 \leq 2 - y \leq 2 \Rightarrow 0 < y < 2 \\ 1 - 1 & si \;\; 2 - y \geq 2 \Rightarrow y < 0. \end{cases}$$

$$G(y) = \begin{cases} 0 & si \;\; y < 0 \\ 1 - \frac{(2-y)^2(1-y)}{4} = & si \;\; 0 \leq y \leq 2 \\ 1 & si \, y > 2. \end{cases}$$

*************** °°° ***************