UFR de Sciences Économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

L3-S5 - Economie & Gestion

Statistique & Probabilités

Corrigé du Contrôle Continu n° 2

Durée 1h30 - Année Universitaire 2023 - 2024

Exercice 1 : **(Barème de notation : chaque question est notée sur 1.5 pt : 9 x 1.5 = 13.5 pts)**

1) Probabilité d'avoir au plus un accident du travail au cours des 10 derniers jours :

X la variable aléatoire réelle associée au nombre d'accidents du travail par jour au cours des $n = 10$ derniers jours. $X \to B(n = 10\,;\, p)$ sachant que :

$$P(X=0) = C^0_{n=10} p^0 q^{n=10} = q^{10} = 10.74\% \Rightarrow q = \sqrt[10]{0.1074} = 0.8 \;\Rightarrow\; p = 1-q = 0.2$$
$$\Rightarrow X \to B(n=10\,;\, p=0.2)\;;\; P(X=k) = C^k_{10}\, 0.2^k\, 0.8^{10-k} \quad \text{pour } k = 0,1,\cdots,10.$$
$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0.1074 + C^1_{10}\, 0.2^1\, 0.8^9 = 0.1074 + 0.2684 = 37.58\%$$

2) Probabilité d'avoir 3 député(e)s de la majorité présidentielle :

X la variable aléatoire réelle associée au nombre de député(e)s de la majorité parmi les 5 député(e)s prélevé(e)s au hasard du groupe des 20 député(e)s.

$a = 10$ "succès - député(e)s de la majorité" et $b = 10$ "échecs". $N = a + b = 20$ avec $p = \frac{a}{N} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$
$X \to H(N = 20\,;\, n = 5\,;\, p = \frac{10}{20} = \frac{1}{2})$.

$$P(X=k) = \frac{C^k_{10}\, C^{5-k}_{10}}{C^5_{20}} \quad k = 0,1,\cdots, n=5 \quad ; \quad P(X=3) = \frac{C^3_{10}\, C^2_{10}}{C^5_{20}} = 34.83\%.$$

3) Probabilité d'avoir exactement deux sinistres au cours d'une **année** donnée :

X la variable aléatoire réelle associée au nombre de sinistres par **mois** enregistrés par la campagnie d'assurance.

$$X \to \mathscr{P}(\lambda) \quad ; \quad P(X=k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0,1,\cdots,+\infty$$

La loi est bimodale avec $P(X=0) = P(X=1)$:

$\Rightarrow\; Mode^1 = \lambda - 1 = 0$ et $Mode^2 = \lambda = 1\;;\; \Rightarrow X \to \mathscr{P}(\lambda = 1)$

ou encore, $P(X=0) = P(X=1) \;\Leftrightarrow e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^1}{1!} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1!}{0!} = 1\;;\; \Rightarrow X \to \mathscr{P}(\lambda = 1)$.

Soit Y la variable aléatoire réelle associée au nombre de sinistres par **an** enregistrés par la campagnie d'assurance.

Les sinistres sont supposés indépendants, la somme de 12 lois de Poisson indépendantes $\mathscr{P}(\lambda = 1)$ va suivre une loi de Poisson $\mathscr{P}(\beta = 12\lambda = 12)$; $P(Y=k) = e^{-\beta}\,\frac{\beta^k}{k!} \quad k = 0,1,\cdots,+\infty$

$$P(Y=2) = e^{-12}\,\frac{12^2}{2!} = e^{-12}\,\frac{144}{2} = 72e^{-12} = 0.04\%$$

4) Probabilité de trouver la bonne clé au $5^{ème}$ essai :

X : la variable aléatoire réelle associée au nombre d'essais jusqu'à trouver la bonne clé, va suivre une loi géométrique. $\rightarrow \mathscr{G}(p=0.1)$ avec équiprobabilité de succès $p=\frac{1}{10}$, trousseau de 10 clés.

$$P(X=k)=pq^{k-1} \quad k=1,\cdots,+\infty \quad ; \quad P(X=5)=\frac{1}{10}\frac{9}{10}^{4}=6.56\%.$$

5) Paramètres m et σ^2 de cette loi normale :

X : la variable aléatoire réelle associée au cours en € du titre Michelin de l'indice CAC 40.

$$X \rightarrow N(m=?\,;\,\sigma^2=?)$$

$$\begin{cases} P(Y\leq 28)=\frac{5000}{10000}=0.5\ (\Rightarrow m=28\ ) \\ P(Y>31)=\frac{668}{10000}=0.0668 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(U\leq\frac{(28-m)}{\sigma})=0.5 \\ 1-P(U\leq\frac{(31-m)}{\sigma})=0.0668 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi[\frac{(15-m)}{\sigma}]=0.5 \\ \Phi[\frac{(31-m)}{\sigma}]=0.9332 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(28-m)}{\sigma}=0 \\ \frac{(31-m)}{\sigma}=1.50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=28 \\ 28+1.50\sigma=31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=28€ \\ \sigma=\frac{3}{1.50}=2€ \end{cases}$$

$$X \rightarrow N(m=28\,;\,\sigma^2=2^2)$$

6) Probabilité qu'un semi-conducteur passe entre 2 et 4 minutes sur la chaine d'Assemblage :

A : le temps de passage sur la chaine d'assemblage : $A \rightarrow Exp(\lambda)$; $E(A)=\frac{1}{\lambda}=5 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{5}$.

Rappel de la fonction de répartition de A : F(a) = $\begin{cases} 0 & si\ a<0 \\ 1-e^{-\frac{a}{5}} & si\ a\geq 0 \end{cases}$

$$P(2\leq A\leq 4)=F(4)-F(2)=(1-e^{-\frac{4}{5}})-(1-e^{-\frac{2}{5}})=e^{-\frac{2}{5}}-e^{-\frac{4}{5}}=22.10\%.$$

7) Probabilité qu'un semi-conducteur passe plus de 2 minutes sur la chaine de Contrôle :

C : le temps de passage sur la chaine de Contrôle : $C \rightarrow U_{[1;3]}$.

Rappel de la fonction de répartition de C : G(c) = $\begin{cases} 0 & si\ c<0 \\ \frac{c-1}{2} & si\ 1\leq c\leq 3 \\ 1 & si\ c>3 \end{cases}$

$$P(C>2)=1-P(C\leq 2)=1-G(2)=1-\frac{2-1}{2}=50\%.$$

8) Probabilité qu'un semi-conducteur passe plus de 3 mns sur la chaine d'Assemblage et moins de 2 mns sur la chaine de Contrôle :

$P[(A>3)\cap(C\leq 2)]=P(A>3)\times P(C\leq 2)$ car les variables aléatoires réelles A et C sont indépendantes.

$$=(1-P(A\leq 3))\times P(C\leq 2)=(1-F(3))\times G(2)$$
$$=(1-1+e^{-\frac{3}{5}})\times\frac{2-1}{2}=\frac{e^{-\frac{3}{5}}}{2}=27.44\%$$

9) Exprimer S en fonction de A et C - Déterminer le temps moyen de fabrication d'un semi-conducteur :

On note S la variable aléatoire réelle représentant le temps total nécessaire à la fabrication d'un semi-conducteur : $S=A+C$.

On en déduit que le temps moyen de fabrication : $E(S)=E(A+C)=E(A)+E(C)=5+\frac{1+3}{2}=7$ minutes.

*************** °°° ***************

Exercice 2 : **(Barème de notation : 1) 3 x 1.25 pt 2) 1.5 pt 3) 1.25 pt = 6.5 pts)**

1) Calcul des probabilités :

X_i : masse d'une personne i suit une loi normale : $X_i \to \mathcal{N}(m = 75\ ;\ \sigma^2 = 5^2)$

Si l'on suppose que le poids de chaque personne est indépendant du poids des autres personnes présentes dans l'ascenseur, alors les 9 variables X_i sont indépendantes.

$$\left.\begin{array}{l} X_i \to \mathcal{N}(m = 75\ ;\ \sigma^2 = 5^2) \\ X_i \textit{ sont indépendantes.} \end{array}\right\} \Rightarrow\ S = \Sigma_{i=1}^{9} X_i \to \mathcal{N}(m = 9 \times 75 = 675\ ;\ \sigma^2 = 9 \times 5^2 = 225 = 15^2)$$

Probabilité d'avoir un poids inférieur à 670 kg quand un groupe de 9 personnes monte dans l'ascenseur :

$$\begin{aligned} P(S \leq 670) &= P(U \leq \tfrac{670-675}{15}) = P(U \leq -0.3333) = \Phi(-0.3333) \\ &= 1 - \Phi(0.3333) = 1 - 0.6306 = 36.94\%. \text{ Cf. table } \mathcal{N}(0;1). \end{aligned}$$

Probabilité d'avoir un poids compris entre 670 et 700 kg quand un groupe de 9 personnes monte dans l'ascenseur :

$$\begin{aligned} P(670 \leq S \leq 700) &= P(\tfrac{670-675}{15} \leq U \leq \tfrac{700-675}{15}) = P(-0.3333 \leq U \leq 1.6667) \\ &= \Phi(1.6667) - \Phi(-0.3333) = \Phi(1.6667) - 1 + \Phi(0.3333) \\ &= 0.9522 - 1 + 0.6306 = 58.28\% \text{ cf. table } \mathcal{N}(0;1). \end{aligned}$$

Probabilité d'avoir un poids supérieur à 670 kg sachant qu'il est inférieur à 700 kg quand un groupe de 9 personnes monte dans l'ascenseur :

$$\begin{aligned} P[(S > 670)/(S \leq 700)] &= \tfrac{P[(S>670)\cap(S\leq 700)]}{P(S\leq 700)} = \tfrac{P(670\leq S\leq 700)}{P(S\leq 700)} = \tfrac{P(-0.3333\leq U\leq 1.6667)}{P(U\leq 1.6667)} \\ &= \tfrac{\Phi(1.6667)-\Phi(-0.3333)}{\Phi(1.6667)} = \tfrac{\Phi(1.6667)-1+\Phi(0.3333)}{\Phi(1.6667)} \\ &= \tfrac{0.9522-1+0.6306}{0.9522} = \tfrac{0.5828}{0.9522} = 61.21\% \text{ . Cf. table } \mathcal{N}(0;1). \end{aligned}$$

2) Dans moins de 5% des cas le poids des 9 personnes dans l'ascenseur sera inférieur ou égal à :

On cherche s_0 le poids des 9 personnes tel que : $P(S \leq s_0) \leq 0.05$

$$\begin{aligned} &P(S \leq s_0) = P(U \leq \tfrac{s_0-675}{15}) = \Phi(\tfrac{s_0-675}{15}) \leq 0.05 \\ &\Rightarrow\ \Phi(\tfrac{-s_0+675}{15}) \geq 0.95\ \Rightarrow\ \tfrac{-s_0+675}{15} \geq 1.645\ \Rightarrow\ s_0 \leq 650.33 \text{ kg.} \end{aligned}$$

3) Probabilité qu'il y ait surpoids, quand un groupe de 9 personnes monte dans l'ascenseur :

$$\begin{aligned} P(S > 700) &= 1 - P(S \leq 700) = 1 - P(U \leq \tfrac{700-675}{15}) = 1 - P(U \leq 1.6667) \\ &= 1 - \Phi(1.6667) = 1 - 0.9522 = 4.78\% \text{ cf. table } \mathcal{N}(0;1). \end{aligned}$$

*************** °°° ***************