UFR de Sciences Économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2 | Université de Lyon

L3-S5 - Economie & Gestion

Statistique & Probabilités

Corrigé du Contrôle Continu n° 2

Durée 1h30 - Année Universitaire 2024 - 2025

Exercice 1 : (Barème de notation : 1) 2.5 pts 2) 1 pt 3) 1 pt 4) 1 pt 5) 1 pt = 6.5 pts)

1) Loi de probabilité exacte - Acceptation du lot :

X : nombre de véhicules défectueux dans l'échantillon de taille $n = 100$ prélevé sans remise d'une population de taille $N = 1200$ véhicules. 2 résultats possibles (Défectueuse / Non défectueuse) réalisés dans des conditions de dépendance.

X suit une loi Hypergéométrique : $X \to H(N = 1200\,;\, n = 100\,;\, p = 2\%)$

$N = a + b$ avec $a = 24$ défectueux et $b = 1176$ non défectueux :

$$P(X = k) = \frac{C_{24}^{k}\, C_{1176}^{100-k}}{C_{1200}^{100}} \quad k = 0, 1, \cdots, 24$$

Expression de la probabilité qu'un lot soit accepté avec ce plan de contrôle :

$$P(X = 0) = \frac{C_{24}^{0}\, C_{1176}^{100}}{C_{1200}^{100}} = 12.13\%$$

2) Probabilité qu'un composant soit hors d'usage au bout de 1300 heures de fonctionnement :

Soit X la v.a.r. associée à la durée de vie des composants : $X \to N(m = 1500 \text{ h}\,;\, \sigma^2 = 300^2)$.

$$P(X < 1300) = P(U \leq \tfrac{1300-1500}{300}) = \Phi(-0.667) = 1 - \Phi(0.667) = 1 - 0.7476 = 25.24\%$$

cf. table N(0,1), $\Phi(0.667) = 0.7476$.

3) Dans un lot de 10 000 composants, le nombre de composants qui seront hors d'usage entre la 1300 et 1600 heures :

$$P(1300 < X < 1600) = P(\tfrac{1300-1500}{300} \leq U \leq \tfrac{1600-1500}{300}) = P(-0.667 \leq U \leq 0.333)$$
$$= \Phi(0.333) - \Phi(-0.667) = \Phi(0.333) + \Phi(0.667) - 1$$
$$= 0.6304 + 0.7476 - 1 = 0.3780 = 37.80\%$$

cf. table N(0,1), $\Phi(0.333) = 0.6304$ et $\Phi(0.667) = 0.7476$.

Dans un lot de 10000 composants, il y aura 3780 composants qui seront hors d'usage entre la 1300 et 1600 heures.

4) 20% des composants de cette PME a une durée de vie supérieure ou égale à quelle valeur :

On cherche x_0 tel que : $P(X \geq x_0) = 0.20 \Rightarrow P(U \geq \frac{x_0-1500}{300}) = 0.20$

$$\Rightarrow 1 - \Phi(\tfrac{x_0-1500}{300}) = 0.20 \Rightarrow \Phi(\tfrac{x_0-1500}{300}) = 0.80$$
$$\Rightarrow \tfrac{x_0-1500}{300} = 0.845 \Rightarrow x_0 = 1753.5 \text{ heures.}$$

cf. table N(0,1), $\Phi(0.845) = 0.80$.

5) Valeurs autour de la moyenne où se situe la durée de vie des 95% des composants :

On cherche x_0 tel que : $P(-x_0 < X - m < x_0) = 0.95 \Rightarrow P(-\frac{x_0}{300} \leq U \leq \frac{x_0}{300}) = 0.95$

$\Rightarrow 2\Phi(\frac{x_0}{300}) - 1 = 0.95 \Rightarrow \Phi(\frac{x_0}{300}) = 0.975$

$\Rightarrow \frac{x_0}{300} = 1.96 \Rightarrow x_0 = 588$ heures.

cf. table N(0,1), $\Phi(1.96) = 0.975$.

On a, $P(-588 < X - m < 588) = P(912 < X < 2088) = 0.95$.

*************** °°° ***************

Exercice 2 : (Barème de notation : chaque question est notée sur 1.5 pt = 13.5 pts)

Une centrale automobile vend 2 types de véhicules (Tourisme, Utilitaires et Camping-cars). Ces 2 types de vente sont complètement indépendants.

- **Véhicules de tourisme** :

1) Loi de probabilité de X :

X : Nombre de véhicules de tourisme vendus par an ; $X \to B(n = 1600\ ;\ p = 0.8)$. 2 résultats ou ventes possibles (Tourisme / Non tourisme) réalisées dans des conditions d'indépendance.

$$P(X = k) = C_{1600}^{k} 0.8^k 0.2^{1600-k}\ ;\ k = 0, 1, \cdots, n = 1600$$

Caractéristiques : $E(X) = np = 1280$ et $V(X) = npq = 256 = 16^2$

Loi approchée de X :

Conditions d'approximation d'une loi $B(n,p)$ par la loi $N(m = np\ ;\ \sigma^2 = \sqrt{npq}^2)$:

$$\begin{cases} X\ suit\ une\ loi\ binomiale \\ \mathrm{X} \to B(n = 1600\ ;\ p = 0.80) \\ \mathrm{E(X) = np = 1280} \\ \mathrm{V(X) = npq = 144} = 16^2 \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} X\ suit\ une\ loi\ normale\ TCL \\ n = 1600 (> 30)\ ;\ np = 1280 (> 5)\ ;\ nq = 320 (> 5) \\ \mathrm{X} \to N(m = 1280\ ;\ \sigma^2 = 16^2) \\ \Leftrightarrow U = \frac{(X-1280)}{16} \to N(0,1) \end{cases}$$

2) Valeur approchée de la probabilité que la centrale automobile vende plus de 1300 véhicules de tourisme/an :

$P(X > 1300) \simeq_{C.C.} 1 - P(X \leq 1300 + 0.5) = 1 - P(U \leq \frac{1300.5-1280}{16}) = 1 - \Phi(1.2813) = 10\%$

$\Phi(1.2813) = 90\%$ cf. Table N(0,1).

3) Valeur approchée de la probabilité de vendre plus de 1300 et au plus 1320 véhicules de tourisme par an :

$P(1300 < X \leq 1320) \simeq_{C.C.} P(1300.5 < X \leq 1320.5)$

$= P(\frac{1300.5-1280}{16} = 1.2813 \leq U \leq \frac{1320.5-1320}{16} = 2.5313)$

$= \Phi(2.5313) - \Phi(1.2813) = 0.9943 - 0.90 = 9.43\%$

avec $\Phi(2.5313) = 0.9943$ Cf. Table N(0,1).

• **Véhicules utilitaires Renault** :

Y : Nombre de véhicules utilitaires Renault vendus par <u>**mois**</u> ; $Y \to P(\lambda)$.

$$P(Z=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\ \ ;\ \ k=0,\cdots,+\infty$$

4) Probabilité de vendre exactement 10 véhicules utilitaires/mois Modes :

Sachant que $V(Y)=12=E(Y)=\lambda$; $Y \to P(\lambda=12)$.

Probabilité de vendre exactement 10 véhicules utilitaires un mois donné :

$$P(Y=10)=e^{-12}\frac{12^{10}}{10!}=10.48\%$$

Sachant que le paramètre λ est un entier, la distribution Y associée au nombre de véhicules utilitaires vendus/mois est bimodale. Elle admet donc 2 modes. Les ventes mensuelles les plus probables sont $\lambda-1=11$ et $\lambda=12$ ventes/mois.

5) Coefficient de variation de la loi de probabilité de Y :

$CV=|\frac{\sigma_Y}{E(Y)}|=\frac{\sqrt{12}}{12}=28.87\%$. La distribution de probabilité des ventes mensuelles de véhicules utilitaires de cette concession est plutôt homogène.

6) Valeur approchée de la probabilité de vendre exactement 140 véhicules utilitaires par an :

On note Z la variable aléatoire associée au nombre de véhicules utilitaires vendus par an.

$$\begin{cases} \mathrm{Y}_i \quad \text{i=1} \quad \text{à} \quad 12 \quad \text{mois} \\ \mathrm{Y}_i \to P(\lambda=12) \\ \mathrm{Y}_i \quad \text{ventes} \quad \text{mensuelles} \quad \text{indépendantes} \\ \mathrm{E}(\mathrm{Y}_i)=V(Y_i)=\lambda=12 \end{cases} \hookrightarrow \left\{ Z=\Sigma_{i=1}^{12}Y_i \to P(\beta=12\times 12=144) \right.$$

Approximation de la loi de probabilité de Poisson de Z par une loi Normale :

$$\begin{cases} Z \to P(\beta=144) \\ Condition : \beta=144>20 \end{cases} \hookrightarrow \quad Z \to N(m=144\ ;\ \sigma^2=12^2)$$

Probabilité que le concessionnaire vende exactement 140 utilitaires par an :

$$\begin{aligned} P(Z=140) \simeq_{C.C.} & P(139.5<Z\leq 140.5) \\ &= P(\tfrac{139.5-144}{12}=-0.375\leq U\leq \tfrac{140.5-144}{12}=-0.2917) \\ &= \Phi(-0.2917)-\Phi(-0.375)=(1-\Phi(0.2917))-(1-\Phi(-0.375)) \\ &= \Phi(0.375)-\Phi(0.2917)=3.15\% \end{aligned}$$

avec $\Phi(0.2917)=0.6147$; $\Phi(0.3750)=0.6462$ cf. Table N(0,1).

7) Probabilité de vendre une année donnée, plus de 1300 véhicules de Tourisme et 140 véhicules Utilitaires :

$$P[(X>1300)\cap(Z=140)]=P(X>1300)\times P(Z=140)=0.10\times 0.0315=0.315\%$$

car les variables X et Z sont indépendantes.

8) Loi de probabilité de S = X + Z :

$$\begin{cases} X \to N(m_x = 1280\,;\, \sigma_x^2 = 16^2) \\ Z \to N(m_z = 144\,;\, \sigma_z^2 = 12^2) \\ Les\, ventes\, de\, véhicules\, de\, tourisme \\ et\, Utilitaires\, sont\, indépendantes \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} S = X + Z \to N(m_s\,;\, \sigma_s^2) \\ m_s = m_x + m_y = 1424\,;\, \sigma_s^2 = (\sqrt{16^2 + 12^2})^2 = 20^2) \end{cases}$$

9) Probabilité que ce concessionnaire vende une année donnée, plus de 1450 véhicules des deux types :

$$P(S > 1450) = 1 - P(S \leq 1450) = 1 - P(U \leq \tfrac{1450-1424}{20}) = 1 - \Phi(1.3) = 1 - 0.9032 = 9.68\%$$

$\Phi(1.30) = 90.32\%$ cf. Table N(0,1).

*************** °°° ***************