UFR de Sciences économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

L3 - Economie & Gestion

Statistique & Probabilités

Corrigé de l'Examen Terminal - Régime Spécial d'Etudes (RSE)

Durée 1h30 - Année universitaire 2024 - 2025

Exercice 1 : **(Barème de notation : 1) 1.25 pt 2) 1.5 pt 3) 1.25 pt 4) 1.5 pt 5) 1.25 pt = 6.5 pts)**

1) Loi de probabilité exacte :

X : nombre de véhicules défectueux dans l'échantillon de taille $n = 100$ prélevé sans remise d'une population de taille $N = 1200$ véhicules.

X suit une loi Hypergéométrique : $X \rightarrow H(N = 1200\,;\, n = 100\,;\, p = 2\%)$

$N = a + b$ avec $a = 24$ défectueux et $b = 1176$ non défectueux :

$$P(X = k) = \frac{C_{24}^{k}\, C_{1176}^{100-k}}{C_{1200}^{100}} \quad k = 0, 1, \cdots, 24$$

Expression de la probabilité qu'un lot soit accepté avec ce plan de contrôle :

$$P(X = 0) = \frac{C_{24}^{0}\, C_{1176}^{100}}{C_{1200}^{100}} = 12.13\%$$

2) Approximation de X par une loi de probabilité discrète finie :

Condition d'approximation : le taux de sondage $t = \frac{n}{N} = 8.33\% < 10\%$.

$$X \rightarrow H(N = 1200\,;\, n = 100\,;\, p = 2\%) \approx X \hookrightarrow B(n = 100\,;\, p = 2\%).$$

$$P(X = k) \approx C_{100}^{k}\, 0.02^{k}\, 0.98^{n-k} \text{ avec } k = 0, 1, \cdots, n = 100$$

Probabilité approchée qu'un lot soit accepté avec ce plan de contrôle :

$$P(X = 0) \approx C_{100}^{0}\, 0.02^{0}\, 0.98^{100} = 0.98^{100} = 13.26\%.$$

3) Taille de l'échantillon de véhicules à contrôler pour que la probabilité d'acceptation d'un lot soit supérieure ou égale à 80% :

On cherche n^* tel que : $P(X = 0) \geq 80\%$

$$\Rightarrow C_{0}^{n^*}\, 0.02^{0}\, 0.98^{n^*} \geq 0.80 \Rightarrow 0.98^{n^*} \geq 0.80$$

$$\Rightarrow n^* ln0.98 \geq ln0.8 \Rightarrow n^* \leq \frac{ln0.80}{ln0.98} = 11.04$$

Il faudrait prélever un échantillon de taille $n^* \leq 11$ véhicules.

4) Approximation de X par une loi de probabilité discrète infinie :

$X \to H(N = 1200 \,;\, n = 100 \,;\, p = 2\%) \approx B(n = 100 \,;\, p = 2\%) \approx P(\lambda = np = 2)$.

Conditions d'approximation vérifiées :

$n = 100\,(> 30)$, $p = 2\%$ $(< 10\%)$ et $np = 2\,(< 5)$.

$X \hookrightarrow P(\lambda = np = 2)$; $P(X = k) \approx e^{-2}\frac{2^k}{k!}$ avec $k = 0, 1, +\infty$

Probabilité approchée qu'un lot soit accepté avec ce plan de contrôle :

$$P(X = 0) \approx e^{-2}\frac{2^0}{0!} = e^{-2} = 13.53\%.$$

5) Nombre de véhicules défectueux le plus probable dans cet échantillon :

$X \to P(\lambda = 2)$: La distribution est bimodale car $\lambda = 2$ est un entier, les deux modes sont $M_1 = \lambda - 1 = 1$ et $M_2 = \lambda = 2$ véhicules défectueux les plus probables.

$P(X = 1) = P(X = 2) = 2e^{-2} = 27.07\%$.

**************** °°° ****************

Exercice 2 : **(Barème de notation : Chaque question est notée sur 1.25 pt = 5 pts)**

1) Probabilité que le poids d'une boîte soit compris entre 245g et 255g :

Soit X la variable aléatoire réelle associée au poids d'une boîte produite :

$$X \to N(m = 250g \,,\, \sigma^2 = 9.8^2) \Leftrightarrow U = \frac{(X-250)}{9.8} \to N(0\,,\,1)$$

$$P(245 \leq X \leq 255) = P(\frac{(245-250)}{9.8} \leq U \leq \frac{(255-250)}{9.8}) = P(-0.5102 \leq U \leq 0.5102)$$
$$= \Phi(0.5102) - \Phi(-0.5102) = 2 \times \Phi(0.5102) - 1$$
$$= 2 \times 0.6950 - 1 = 39\% \text{ cf. table N(0,1), } \Phi(0.5102) = 0.6950.$$

2) Le quart des boîtes produites aura un poids inférieur à quelle valeur ?

Soit x^* le poids tel que : $P(X < x^*) = 25\% \Rightarrow P(U \leq \frac{(x^*-250)}{9.8}) = \Phi(u) = 25\%$

$\Rightarrow \Phi(-u) = 0.75 \Rightarrow -u = \frac{(x^*-250)}{9.8} = 0.675$

$\Rightarrow x^* = 250 - 9.8 \times 0.675 = 243.385$ g.

3) Probabilité que le poids d'une boîte produite soit inférieur à 235g :

Le service de contrôle estime qu'une boîte est invendable si son poids X est inférieur à 235g.

$$P(X < 235) = P(U \leq \frac{(235-250)}{9.8}) = P(U \leq -1.531) = 1 - \Phi(1.531)$$
$$= 1 - 0.9370 = 6.30\% \text{ cf. table N(0 , 1)}, \Phi(1.531) = 0.9370.$$

4) Loi de probabilité du nombre de boîtes invendables dans la production d'une heure :

On note Y_i la variable aléatoire de Bernoulli définie de la façon suivante :

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la ième boîte est invendable} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Les poids des différentes boîtes produites peuvent être considérés comme indépendants. On contrôle un échantillon de n = 1024 boîtes correspondant à une heure de production.

$Y = \sum_{i=1}^{1024} Y_i$ est la somme de n variables indépendantes de Bernoulli.

Y est la variable aléatoire réelle associée au nombre de boîtes invendables dans la production d'une heure :

$$Y \to B(n = 1024\ ;\ p = P[X < 235] = 0.063)$$

Espérance mathématique $E(Y) = np = 64.51 \approx 65$ boîtes.

*************** °°° ***************

Exercice 3 : **(Barème de notation : 1) 1.25 pt 2) 1.25 pt 3) 1.5 pt 4) 1.5 pt 5) 1.75 pt 6) 1.75 pt = 8.5 pts)**

1) Probabilité pour qu'au cours d'un trimestre de fonctionnement, il y ait au moins une défaillance électronique :

Soit E la variable aléatoire réelle associée au nombre de pannes Electroniques enregistrées au cours d'un semestre de fonctionnement.

$$E \to P(\lambda = 2)\ ;\ P(X = k) = e^{-2}\frac{2^k}{k!}\ \ k = 0, 1, \cdots, +\infty$$
$$P(E \geq 1) = 1 - P(E < 1) = 1 - P(E = 0) = 1 - e^{-2}\frac{2^0}{0!} = 1 - 0.1353 = 86.47\%$$

2) Probabilité pour qu'au cours d'un trimestre de fonctionnement, il y ait au moins une défaillance mécanique :

Soit M la variable aléatoire réelle associée au nombre de pannes Mécaniques enregistrées au cours d'un semestre (80 jours) de fonctionnement :

$$M \to B(n = 80\ ;\ p = 2.5\%).$$
$$P(M = k) = C_{80}^k\, 0,025^k\, 0,975^{80-k} \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \cdots, 80.$$
$$P(M \geq 1) = 1 - P(M < 1) = 1 - P(M = 0) = 1 - (C_{80}^0\, 0.025^0\, 0.975^{80})$$
$$= 1 - 0.975^8 0 = 1 - 0.1319 = 0.8681 = 86.81\%$$

3) Une seule défaillance de l'appareil :

Soit S la variable aléatoire réelle associée au nombre de défaillances de l'appareil au cours d'un semestre (80 jours) de fonctionnement : sachant que les variables E et M sont indépendantes,

$$
\begin{aligned}
P(S=1) &= P[[(E=1)\cap(M=0)]\cup[(E=0)\cap(M=1)]] \\
&= P[(E=1)\cap(M=0)] + P[(E=0)\cap(M=1)] \\
&= P(E=1)\times P(M=0) + P(E=0)\times P(M=1) \\
&= 0.2707\times 0.1319 + 0.1353\times 0.2706 = 7.23\%
\end{aligned}
$$

Les 2 sources de pannes E et M sont indépendantes avec les calculs des probabilités suivantes :

$$
\begin{aligned}
&P(E=0) = e^{-2}\,\tfrac{2^0}{0!} = 13.53\% \\
&P(E=1) = e^{-2}\,\tfrac{2^1}{1!} = 27.07\% \\
&P(M=0) = C_{80}^{0}\,0.025^0\,0.975^{80} = 0.975^{80} = 13.19\% \\
&P(M=1) = C_{80}^{1}\,0.025^1\,0.975^{79} = 80\times 0.025\times 0.975^{79} = 27.06\%
\end{aligned}
$$

4) Une défaillance Electronique et une défaillance Mécanique :

Sachant que les pannes E et M sont indépendantes,

$$
\begin{aligned}
P[(E=1)\cap(M=1)] &= P(E=1)\times P(M=1) \\
&= 0.2707\times 0.2706 = 7.33\%
\end{aligned}
$$

5) Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson :

Conditions d'approximation vérifiées :

$$n = 80(>30)\ ;\ p = 2.5\%(<10\%)\ \text{ et }\ np = 2(<5).$$

$$
\left\{\begin{array}{l} M \to B(n=80\ ,\ p=0.025) \\ E(M)=2 \\ V(M)=1.95 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M \hookrightarrow P(\lambda_M = np = 2) \\ E(M)=V(M)=\lambda_M = 2 \end{array}\right.
$$

La valeur approchée de la question 2) :

$P(M\geq 1) = 1-P(M=0) \approx 1-0.1353 = 86.47\%$ avec $P(M=0)=13.53\%$

6) Loi de probabilité du nombre total de défaillances : S = E + M

$$
\left\{\begin{array}{l} E \to P(\lambda_E = 2) \\ M \hookrightarrow P(\lambda_M = np = 2) \\ E\,et\,M\,sont\,indépendantes. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S = E+M \hookrightarrow P(\beta_S = \lambda_E + \lambda_M = 4) \\ E(S)=V(S)=\beta_S = 4 \end{array}\right.
$$

La valeur approchée de la question 3a) : $P(S=1) \approx e^{-4}\frac{4^1}{1!} = 0.0733 = 7.33\%$

*************** °°° ****************