

L3-S5 : ECONOMIE & GESTION

Corrigé de l'Examen Terminal de Statistique & Probabilités

Session 2 - Durée de l'épreuve 1h 30 - Année Universitaire 2024 - 2025

Exercice : (Barème de notation : a) 1.25 pt b) 1.25 pt c) 1.50 pt d) 1.5 pt e) 1.5 pt f) 1.5 pt g) 1.5 pt
h) 1.25 pt i) 2 pts j) 2 pts k) 2 pts l) 1.5 pt m) 1.25 pt = 20 pts)

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

Une centrale automobile vend trois types de véhicules (Particuliers, Utilitaires et Camping-cars).
Ces 3 types de vente sont complètement indépendants.

• Véhicules particuliers :

X : Nombre de véhicules particuliers vendus par an ; $X \rightarrow N(m_X = 900 ; \sigma_X^2 = 15^2)$.

a) Probabilité que la centrale automobile vende plus de 880 véhicules particuliers par an :

$$P(X > 880) = 1 - P(X \leq 880) = 1 - P(U \leq \frac{880-900}{15}) = 1 - \Phi(-1.33) \\ = \Phi(1.33) = 90.82\% \text{ cf. Table } N(0,1).$$

b) Probabilité que la centrale vende entre 890 et 910 véhicules particuliers par an :

$$P(890 < Y \leq 910) = P(\frac{890-900}{15} = -0.67 \leq U \leq \frac{910-900}{15} = 0.67) \\ = \Phi(0.67) - \Phi(-0.67) = 2 \times \Phi(0.67) - 1 = 49.72\% \\ \text{avec } \Phi(0.67) = 0.7486 \text{ Cf. Table } N(0,1).$$

c) Moins de 25% des ventes annuelles de véhicules particuliers est supérieure à :

$$\text{On cherche } x_0 \text{ tel que : } P(X > x_0) < 0.25 \Rightarrow P(X \leq x_0) > 0.75 \Rightarrow P(U \leq \frac{x_0-900}{15}) > 0.75 \\ \Rightarrow \Phi(\frac{x_0-900}{15}) > 0.75 \Rightarrow \frac{x_0-900}{15} > 0.675 \Rightarrow x_0 > 910.13 \Rightarrow x_0 \geq 911.$$

• Véhicules utilitaires :

d) Probabilité que la centrale vende exactement 80 utilitaires par an :

Y : Nombre de véhicules particuliers vendus par an ; $Y \rightarrow B(n = 400 ; p = 0.2)$.

$$P(Y = k) = C_{400}^k 0.2^k 0.8^{400-k} ; k = 0, \dots, n = 400$$

Caractéristiques : $E(Y) = np = 80$ et $V(Y) = \sigma_Y^2 = npq = 64 = 8^2$

$$P(Y = 80) = C_{400}^{80} 0.2^{80} 0.8^{320} = 4.98\%$$

e) Coefficient de variation de la loi de probabilité de Y :

$CV = \frac{\sigma_Y}{E(Y)} = \frac{8}{80} = 10\%$. La distribution de probabilité des ventes annuelles de véhicules utilitaires est homogène.

f) Valeur approchée de la probabilité de vendre plus de 60 et au plus 100 véhicules utilitaires par an :

$$Y \rightarrow B(n = 400 ; p = 0.2)$$

Conditions d'approximation d'une loi binomiale (discrète finie) $B(n, p)$ par une loi normale (continue) $N(m_Y = np ; \sigma_Y^2 = \sqrt{npq^2})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y \text{ suit une loi binomiale} \\ Y \rightarrow B(n = 400 ; p = 0.20) \\ E(Y) = np = 80 \\ V(Y) = npq = 64 \end{array} \right. \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y \text{ suit une loi normale} \\ n = 400 (> 30) ; p = 20\% (> 10\%) ; np = 80 (> 15) \\ Y \rightarrow N(m_Y = 80 ; \sigma_Y^2 = 8^2) \\ \Leftrightarrow U = \frac{(Y-80)}{8} \rightarrow N(0, 1) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} P(60 < Y \leq 100) &\approx c.c. P(60.5 \leq Y \leq 100.5) = P\left(\frac{60.5-80}{8} \leq U \leq \frac{100.5-80}{8}\right) = P(-2.44 \leq U \leq 2.56) \\ &= \Phi(2.56) - \Phi(-2.44) = \Phi(2.56) + \Phi(2.44) - 1 = 98.75\% \\ &\text{avec } \Phi(2.56) = 0.9948 \text{ et } \Phi(2.44) = 0.9927 \text{ Cf. Table N}(0,1). \end{aligned}$$

• **Camping-cars :**

Z : Nombre de camping-cars vendus par an ; $Z \rightarrow P(\lambda)$.

$$P(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} ; k = 0, \dots, +\infty$$

g) Paramètre λ :

Sachant que la loi de Poisson est bimodale, alors le paramètre λ est un entier.

On a alors $P(Z = \lambda - 1) = P(Z = \lambda)$. Comme $P(Z = 24) = P(Z = 25)$, on en déduit que $\lambda = 25$.

$$\begin{aligned} \text{Ou encore, sachant que : } P(Z = 24) &= P(Z = 25) \Leftrightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^{24}}{24!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{25}}{25!} \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda^{24}}{24!} &= \frac{\lambda^{25}}{25!} \Rightarrow \lambda = \frac{25!}{24!} = 25 = E(Z) = V(Z) ; Z \rightarrow P(\lambda = 25) \end{aligned}$$

h) Probabilité de vendre exactement 30 camping-cars une année donnée :

$$P(Z = 30) = e^{-25} \frac{25^{30}}{30!} = 4.54\%$$

i) Valeur approchée de la probabilité d'avoir au plus 36 ventes de camping-cars en une année :

Conditions d'approximation d'une loi de Poisson (discrète infinie) $P(\lambda)$ par une loi normale (continue) $N(m_Z = \lambda ; \sigma_Z^2 = \sqrt{\lambda}^2)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z \text{ suit une loi de Poisson} \\ Z \rightarrow P(\lambda = 25) \\ E(Z) = V(Z) = 25 \end{array} \right. \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Z \text{ suit une loi normale} \\ \lambda = 25 (> 20) \\ Z \rightarrow N(m_Z = 25 ; \sigma_Z^2 = 5^2) \Leftrightarrow U = \frac{(Z-25)}{5} \rightarrow N(0, 1) \end{array} \right.$$

$$P(Z \leq 36) \approx c.c. P(Z \leq 36.5) = P(U \leq \frac{36.5-25}{5}) = \Phi(2.3) = 98.93\% \text{ Cf. Table N}(0,1)$$

j) Probabilité que la centrale vende une année donnée, plus de 880 véhicules particuliers, 80 véhicules utilitaires et 30 camping-car :

$$\begin{aligned} P[(X > 880) \cap (Y = 80) \cap (Z = 30)] &= P(X > 880) \times P(Y = 80) \times P(Z = 30) \\ &= 0.9082 \times 0.0498 \times 0.0454 = 0.21\% \end{aligned}$$

car les variables X, Y et Z sont indépendantes.

k) **Espérance mathématique $E(S)$ et variance $V(S)$ de S :**

Soit $S = X + Y + Z$ la variable aléatoire réelle associée au nombre total de ventes au cours d'une année. S est la somme de trois variables indépendantes :

$$E(S) = m_S = E(X + Y + Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = 900 + 80 + 25 = 1005$$

$$V(S) = \sigma_S^2 = V(X + Y + Z) = V(X) + V(Y) + V(Z) \text{ car les variables sont indépendantes.} \\ = 225 + 64 + 25 = 314 = 17.72^2$$

l) **Loi de probabilité du nombre total de ventes par an :**

La variable $S = X + Y + Z$ est la somme de trois variables indépendantes normalement distribuées. Elle va donc suivre une loi normales : $S \rightarrow N(m_S ; \sigma_S^2)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow N(m_X = 900 ; \sigma_X^2 = 10^2) \\ Y \rightarrow N(m_Y = 80 ; \sigma_Y^2 = 8^2) \\ Z \rightarrow N(m_Z = 25 ; \sigma_Z^2 = 5^2) \\ X, Y \text{ et } Z \text{ sont indépendantes} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_S = 1005 \text{ et } \sigma_S^2 = 17.72^2 \\ S \rightarrow N(m_S = 1005 ; \sigma_S^2 = 17.72^2) \\ \Leftrightarrow U = \frac{(S-1005)}{17.72} \rightarrow N(0, 1) \end{array} \right.$$

m) **Probabilité que la centrale vende plus de 1020 véhicules de tout type par an :**

$$P(S > 1020) = 1 - P(S \leq 1020) = 1 - P(U \leq \frac{1020-1005}{17.72}) \\ = 1 - \Phi(0.85) = 1 - 0.8023 = 19.77\% \text{ Cf. Table } N(0,1).$$

***** ○○○ *****