Support de cours

L3 – S5 : Statistique & Probabilités

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

Année Universitaire : 2024-2025

R. Abdesselam
UFR de Sciences Economiques et de Gestion
Université Lumière Lyon 2, Campus Berges du Rhône

Rafik.abdesselam@univ-lyon2.fr

http://perso.univ-lyon2.fr/~rabdesse/Documents/

Chapitre 1 : Analyse combinatoire & Dénombrement

L'analyse combinatoire ou théorie mathématique du dénombrement étudie comment compter des objets.

Elle fournit des méthodes efficaces et utiles en probabilité, pour dénombrer les différentes situations pouvant se présenter lors d'une expérience.

En effet, bien des problèmes en théorie des probabilités peuvent être résolus simplement en comptant le nombre de manières différentes selon lesquelles un certain événement peut se réaliser. Par exemple, la formule du binôme de Newton.

Les notions de dénombrement constituent la base de l'approche dite « fréquentiste » des probabilités ; elles permettent, par exemple dans les jeux de hasard, de calculer les probabilités d'occurrence des différents événements d'une expérience.

Chapitre 1 : Analyse combinatoire & Dénombrement

Soit l'ensemble $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$; $card(\Omega) = n$ *éléments* ***distincts*** , $n \in N^*$

Dans le cas où il y a équiprobabilité sur l'ensemble Ω *fini, d'éléments ou d'événements élémentaires, le calcul des probabilités se ramène à un problème de dénombrement.*

La notion d'analyse combinatoire permet d'exprimer par une formule le nombre de configurations possibles

On distingue 3 types de dispositions

- ***Arrangements***
- ***Permutations***
- ***Combinaisons***

Avec répétition d'éléments ou *Sans répétition d'éléments*

Ces dispositions interviennent dans de nombreux problèmes concrets, qu'il s'agisse de :

- *définir la composition du bureau d'une association,*
- *lister le nombre de plaques d'immatriculation ou de numéros de téléphone,*
- *établir les règles d'un jeu publicitaire*
- *établir le nombre de façons de choisir les 5 tireurs de penalties parmi les onze joueurs de football et l'ordre de passage.*

Chapitre 1 : Analyse combinatoire & Dénombrement

Teminologie :

- *Disposition sans répétition :* *p-uple d'éléments de Ω où, chaque élément peut apparaître au plus une fois.*
- *Disposition avec répétition :* *p-uple d'éléments de Ω où, chaque élément peut apparaître plus d'une fois.*

- *Disposition ordonnée : l'ordre des éléments du p-uple est important dans sa caractérisation.*
- *Disposition non ordonnée : l'ordre des éléments du p-uple n'est pas important dans sa caractérisation.*

Notations :

Soit l'ensemble $\boldsymbol{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$; $card(\Omega) = n$ *éléments* **distincts** ; n *et* $p \in N^*$

$\forall n \in N$; $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n = \prod_{i=1}^{n} i$ "factorielle n",

$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! =$ etc. "définition récursive du n!",

$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ "formule de Stirling",

$0! = 1$ "par convention".

UFR de Sciences économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2

1 Dispositions sans répétition

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$; $card(\Omega) = n$ éléments **tous distincts** , n et $p \in N$ avec $\mathbf{p \leq n}$

1.1 ARRANGEMENT (ASR) : *Un arrangement sans répétition de p éléments est une suite ordonnée de p éléments choisis parmi les n éléments distincts de Ω , et qui ne peuvent pas se répéter.*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

« Le nombre total d'arrangements sans répétition de p éléments parmi n ».

Exemple d'application : $\Omega = \{ a, b, c \}$; $card(\Omega) = n = 3$

Les arrangements possibles sans répétition de p = 2 éléments parmi les n = 3 éléments de Ω sont :

Diagramme arborescent

$a \to b$ (a , b)
$a \to c$ (a , c)
$b \to a$ (b , a)
$b \to c$ (b , c)
$c \to a$ (c , a)
$c \to b$ (c , b)

6 couples au total

- *Suites ordonnées,* on tient bien compte de l'ordre des éléments : (a , b) ≠ (b , a) , (a , c) ≠ (c , a) et (b , c) ≠ (c , b)
- *Pas de répétition d'élément :* ~~(a , a)~~ , ~~(b , b)~~ , ~~(c , c)~~

$A_3^2 = 3!/1! = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ arrangements sans répétition

ASR : Exemples d'application

1) Quel est le nombre de quintés possibles dans une course hippique où, 8 chevaux sont au départ ?

$Card(\Omega) = n = 8$; $p = 5$ chevaux

$A_8^5 = 8! / (8-5)! = 8! / 3! = 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 6720$ quintés ou arrivées possibles.

2) De combien de façons différentes une assemblée de 12 personnes peut-elle désigner un bureau comprenant : un président, un trésorier et un secrétaire ?

$Card(\Omega) = n = 12$; $p = 3$ personnes

$A_{12}^3 = 12! / (12-3)! = 12! / 9! = 10 \times 11 \times 12 = A_{12}^1 A_{11}^1 A_{10}^1 = 1320$ assemblées possibles.

3) Dix étudiants sont candidats pour être délégué ou délégué suppléant d'un groupe de TD. La liste des élus est affichée suivant le nombre de voix obtenues.

- Quel est le nombre de listes possibles ?

$Card(\Omega) = n = 10$; $p = 2$ étudiants pour des rôles spécifiés : délégué et délégué suppléant

$A_{10}^2 = 10! / (10-2)! = 10! / 8! = 9 \times 10 = A_{10}^1 A_9^1 = 90$ listes possibles.

- Déterminer le nombre de candidats pour qu'on ait à afficher que 30 listes.

$A_n^2 = n! / (n-2)! = n(n-1) = 30 \Rightarrow n = 6$ personnes.

4) Combien peut-on former de nombres avec 3 chiffres distincts et différents de zéro ?

$Card(\Omega) = n = 3$ chiffres ; Nombres à 1 chiffre ou à 2 chiffres ou à 3 chiffres

$A_3^1 + A_3^2 + A_3^3 = 3 + 6 + 6 = 15$ nombres possibles.

1 Dispositions sans répétition

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$; $card(\Omega) = n$ éléments **distincts** , n et $p \in N$ avec $p \leq n$

1.2 PERMUTATION (PSR) : *Une permutation sans répétition est une suite ordonnée de la totalité des n éléments distincts de Ω, et qui ne peuvent pas se répéter.*

$$P_n = n!$$

« Le nombre total de permutations sans répétition d'éléments ».

Remarque : *Une PSR d'un ensemble Ω de cardinal $n \geq 1$ est un ASR, lorsque $p = n$.*

Exemple d'application : $\Omega = \{a, b, c\}$; $card(\Omega) = n = 3$

Les permutations possibles sans répétition de $p = 3$ éléments parmi les $n = 3$ éléments de Ω sont :

Diagramme arborescent

$a \to b \to c$ (a, b, c)
$a \to c \to b$ (a, c, b)
$b \to a \to c$ (b, a, c)
$b \to c \to a$ (b, c, a)
$c \to a \to b$ (c, a, b)
$c \to b \to a$ (c, b, a)

6 triplets au total

- Suites ordonnées, on tient bien compte de l'ordre des éléments : $(a, b, c) \neq (b, a, c)$, $(a, c, b) \neq (c, a, b)$ etc.
- Pas de répétition d'éléments : ~~(a , a , a)~~ , ~~(b , b, b)~~ , ~~(c , c , c)~~ ~~(a , a, b)~~ , ~~(a , a , c)~~ , etc.

$P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ permutations sans répétition

PSR : Exemples d'application

1) De combien de façons différentes peut-on asseoir 5 personnes :
   - sur un banc ?
   - autour d'une table ?

Card(Ω) = n = 5 ; p = n « toutes les 5 personnes sont à placer »

Sur un banc : $P_5 = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ *possibiltés.*

Card(Ω) = n = 5 ; « 1 personne s'installe puis les 4 autres viennent se placer autour »

Autour d'une table : $P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ *plans de table.*

1 Dispositions sans répétition

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$; $card(\Omega) = n$ éléments **distincts** , n et $p \in N$ avec $p \leq n$

1.3 COMBINAISON (CSR) *: Une combinaison sans répétition est un sous-ensemble non ordonné de p choisis parmi les n éléments distincts de Ω, et qui ne peuvent pas se répéter.*

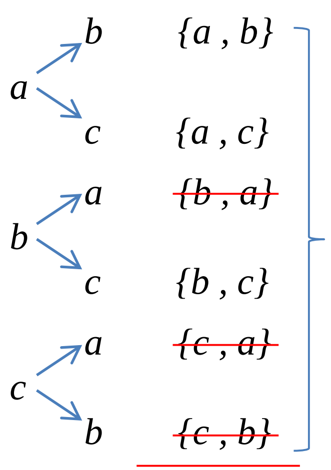
$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

« Le nombre total de combinaisons sans répétition de p éléments parmi n ».

Exemple d'application : *$\Omega = \{a, b, c\}$; $card(\Omega) = n = 3$*

Les combinaisons possibles sans répétition de p = 2 éléments parmi les n = 3 éléments de Ω sont :

Diagramme arborescent



3 sous-ensembles au total

- *Sous-ensembles non ordonnés, on ne tient pas compte de l'ordre des éléments :* $\{a, b\} = \{b, a\}$, $\{a, c\} = \{c, a\}$ et $\{b, c\} = \{c, b\}$
- *Pas de répétition d'élément :* ~~(a , a)~~ , ~~(b , b)~~ , ~~(c , c)~~

$C_3^2 = 3!\,/\,1!\,2! = 3$ *combinaisons sans répétition*

CSR : Exemples d'application

1) Combien de parties d'échecs distinctes peut-on organiser dans un groupe de 6 personnes ?

$Card(\Omega) = n = 6 \;;\; p = 2$ personnes

$C_6^2 = 6!/(6-2)!\;2! = 6!/4!\;2! = 5 \times 6/2 = 15$ parties .

2) Soit l'ensemble Ω = {a , b , c} ; card(Ω) = n = 3.

a) Combien existe-t-il de parties de Ω possédant 2 éléments ?

b) Combien existe-t-il de parties de Ω possédant k éléments (k ≤ 3) ?

c) Combien existe-t-il de parties de Ω possédant un nombre quelconque d'éléments ? Retrouver l'écriture de toutes les parties de Ω.

a) $Card(\Omega) = n = 3 \;;\; p = 2$ lettres

$C_3^2 = 3!/(3-2)!\;2! = 3!/1!\;2! = 3$: $\{a , b\} \;;\; \{a , c\} \;;\; \{b , c\}$

b) $Card(\Omega) = n = 3 \;;\; p = k \leq 3$ lettres

$C_3^k = 3!/(3-k)!\;k!$

c) $Card(\Omega) = n = 3$; parties vide ou à 1 lettre ou à 2 lettres ou à 3 lettres

$$\sum_{k=0}^{3} C_3^k = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

ϕ ; $\{a\} \;;\; \{b\} \;;\; \{c\}$; $\{a , b\} \;;\; \{a , c\} \;;\; \{b , c\}$; $\{a , b , c\} = \Omega$

Ensemble vide ; singletons ; paires ; Ensemble fondamental

CSR : Propriétés

1) $C_n^{\,p} = C_n^{\,n-p}$ *(Complémentaire - Symétrie)*

2) $C_n^{\,p} = C_{n-1}^{\,p} + C_{n-1}^{\,p-1}$ *(Triangle de Pascal)*

3) $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^{\,p}\, a^{p}\, b^{n-p}$ *(Formule du binôme de Newton)*

4) $2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^{\,p}$

5) $\sum_{p=0}^{n} C_n^{\,p}\, a^{p}\, b^{n-p} = 1$ *(propriété de la loi de probabilité binomiale)*

Triangle de Pascal - Coefficients binomiaux : $C_n^{\,p}$

$C_n^{\,p}$	p = 0	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4	p = 5	…	p-1	p
n = 0	1								
n = 1	1	1							
n = 2	1	2	1						
n =3	1	3	3	1					
n = 4	1	4	6	4	1				
n = 5	1	5	10	10	5	1			
:	1	6	15	20	15	6	1		
n-1	$C_{n-1}^{\,0} = 1$							$C_{n-1}^{\,p-1}$	$C_{n-1}^{\,p}$
n	$C_n^{\,0} = 1$								$C_n^{\,p}$

Symétrie

CSR : Propriétés

Triangle de Pascal - Coefficients binomiaux : C_n^p

C_n^p	p = 0	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4	p = 5	…	p-1	p
n = 0	1								
n = 1	1	1							
n = 2	1	2	1						
n =3	1	3	3	1					
n = 4	1	4	6	4	1				
n = 5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**			
:	1								
n-1	$C_{n-1}^{0} = 1$							C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^{p}
n	$C_n^0 = 1$								C_n^p

3) $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \; a^p \, b^{n-p}$ *(Formule du binôme de Newton)*

3) Démonstration : raisonnement par récurrence en utilisant la propriété 2).
Décomposition à partir du triangle de Pascal pour n = 5 :

$(a+b)^5 = C_5^0 \; a^0 b^5 + C_5^1 \; a^1 b^4 + C_5^2 \; a^2 b^3 + C_5^3 \; a^3 b^2 + C_5^4 \; a^4 b^1 + C_5^5 \; a^5 b^0$

$= \mathbf{1} \; b^5 + \mathbf{5} \; a^1 b^4 + \mathbf{10} \; a^2 b^3 + \mathbf{10} \; a^3 b^2 + \mathbf{5} \; a^4 b^1 + \mathbf{1} \; a^5$

UFR de Sciences économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2

CSR : Propriétés

4) $2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p$ *(propriété du cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble)*

4) On pose $a = b = 1$: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k \, b^{n-k} \Rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$

Cette propriété permet de déterminer le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble.

Si le $card(\Omega) = n$ alors le $card(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$

Exemple d'application : $\Omega = \{ a, b, c \}$; $card(\Omega) = n = 3$

L'ensemble des parties de $\boldsymbol{\Omega}$ **:**

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{ \phi , \underbrace{\{a\} , \{b\} , \{c\}} , \underbrace{\{a, b\} , \{a, c\} , \{b, c\}} , \{ a, b, c \} = \Omega \}$$

Ensemble vide , Singletons , paires , triplets = Ω

$$card(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^3 = 8$$

5) $\sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^p \, b^{n-p} = 1$ (propriété de la loi de probabilité binomiale)

5) Pour $p \in [0 , 1]$, on pose $a = p$ et $b = (1 - p)$

Le développement donne :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k \, (1 - p)^{n-k}$$

Ce cas particulier permettra de définir la loi de probabilité binomiale.

2 Dispositions avec répétition

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$; $card(\Omega) = n$ éléments **tous distincts** , n et $p \in N$

avec p quelconque ($p \leq n$ **ou** $p > n$)

2.1 ARRANGEMENT (AAR) : *Un arrangement avec répétition de p éléments est une suite ordonnée de p éléments choisis parmi les n éléments distincts de* Ω*, et qui peuvent se répéter.*

$$\mathcal{A}_n^p = n^p$$

« Le nombre total d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n ».

Exemple d'application : $\Omega = \{ a, b, c \}$; $card(\Omega) = n = 3$

Les arrangements avec répétition de $p = 2$ *éléments parmi les* $n = 3$ *éléments de* Ω *sont :*

Diagramme arborescent

$\Omega \quad \Omega \rightarrow \Omega \times \Omega = \Omega^2$; $card(\Omega^p) = (card(\Omega))^p = n^p$

$a \rightarrow b$: (a, b)
$a \rightarrow a$: (a, a)
$a \rightarrow c$: (a, c)

$b \rightarrow a$: (b, a)
$b \rightarrow b$: (b, b)
$b \rightarrow c$: (b, c)

$c \rightarrow a$: (c, a)
$c \rightarrow c$: (c, c)
$c \rightarrow b$: (c, b)

9 couples au total

- *Suites ordonnées,* on tient bien compte de l'ordre des éléments : $(a, b) \neq (b, a)$, $(a, c) \neq (c, a)$ et $(b, c) \neq (c, b)$
- *Répétition d'éléments :* (a, a) , (b, b) , (c, c)

$\mathcal{A}_3^2 = 3^2 = 9$ arrangements avec répétition

AAR : Exemples d'application

1) Combien peut-on former d'octets (mot de 8 éléments binaires) ?

$\Omega = \{0, 1\}$; $Card(\Omega) = n = 2$; $p = 8 > n$

$p = 8$

0	1	1	0	1	0	0	1

$\mathcal{A}_2^8 = 2^8 = 256$ octets possibles.

2a) Combien y-a-t-il d'initiales possibles (2 lettres) pour un étudiant ?

$\Omega = \{a, b, c, \ldots, z\}$; $Card(\Omega) = n = 26$; $p = 2$ lettres ; $\mathcal{A}_{26}^2 = 26^2 = 676$ initiales possibles.

2b) Combien faut-il d'étudiants dans une promotion pour qu'il soit <u>certain</u> que 2 étudiants au moins aient les mêmes initiales ? *Il faut au moins 677 étudiants dans la promotion.*

3) Dénombrer le nombre de codes possibles d'une carte bancaire

$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$; $Card(\Omega) = n = 10$; Code : $p = 4$ chiffres

5	0	7	9

$\mathcal{A}_{10}^4 = 10^4 = 10\,000$ codes possibles.

4) Combien peut-on former de sigles d'entreprises de plus d'une lettre et au plus 3 lettres à partir des 26 lettres de l'alphabet latin ?

S	A

R	T	U

$\Omega = \{a, b, c, \ldots, z\}$; $Card(\Omega) = n = 26$; Sigle : $p = 2$ ou 3 lettres

$\mathcal{A}_{26}^2 + \mathcal{A}_{26}^3 = 26^2 + 26^3 = 676 + 17\,576 = 18\,252$ sigles possibles.

5) Une plaque minéralogique ou d'immatriculation d'un véhicule est composée de 2 lettres latines, suivies de 3 chiffres puis de 2 lettres latines. Combien de plaques différentes peut-on lister ?

Lettres : $Card(\Omega_1) = n_1 = 26$; $p = 2$; Chiffres : $Card(\Omega_2) = n_2 = 10$; $p = 3$

$\mathcal{A}_{26}^2 \; \mathcal{A}_{10}^3 \; \mathcal{A}_{26}^2 = 676 \times 1000 \times 676 = 456\,976\,000$ plaques possibles.

A	E	-	2	8	1	-	R	F

UFR de Sciences économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2

2 Dispositions avec répétition

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$; $card(\Omega) = n$ éléments **tous distincts** , n et $p \in N$

avec p quelconque ($p \leq n$ **ou** $p > n$)

2.2 PERMUTATION (PAR) : *Une permutation avec répétition de p éléments de Ω, pour la répartition (p_1; p_2; ... p_n), est une suite ordonnée de p éléments qui peuvent se répéter, où, le premier élément Ω figure p_1 fois, le second p_2 fois, etc., tel $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = p$. Le nombre de permutations avec répétition est :*

$$\mathscr{P}_{p;(p_1,p_2,\ldots,p_n)} = \frac{p!}{p_1!\,p_2!\ldots P_n!}$$

« Le nombre total de permutations avec répétition d'éléments selon une répartition donnée ».

Exemple d'application : $\Omega = \{a, b, c\}$; $card(\Omega) = n = 3$

Les permutations avec répétition de p = 4 éléments parmi les n = 3 éléments distincts de Ω, selon la répartition (3, 1, 0) sont :

Diagramme arborescent

$p_1 = 3$ fois a	(a , a , a , b)
$p_2 = 1$ fois b	(a , a , b , a)
$p_3 = 0$ fois c	(a , b , a , a)
$\Sigma pi = 4 = p$	(b , a , a , a)

4 quadruplets au total

- *Suites ordonnées,* on tient bien compte de l'ordre des éléments : (a , a , a , b) ≠ (b , a , a , a) ≠ (a , b , a , a) ≠ (b , a , a , a) .
- *Répétition d'élément :* selon la répartition

$\mathscr{P}_{4\,;\,(3\,,\,1\,,\,0)} = 4!\,/\,3!\,1!\,0! = 4$ permutations avec répétition

PAR : Exemples d'application

1) Combien peut-on former d'anagrammes du mot « ECONOMIE » ?

$\Omega = \{E, C, O, N, M, I\}$; $card(\Omega) = n = 6$; $E:2, C:1, O:2, N:1, M:1, I:1$

$p = 8 > n$; répartition : $(2, 1, 2, 1, 1, 1)$

$p = 8$

E	C	O	N	O	M	I	E

$\mathcal{P}_{8, (2,1,2,1,1,1)} = 8! / 2!\ 1!\ 2!\ 1!\ 1!\ 1! = 10\,080$ anagrammes possibles.

2) A partir du mot « ECONOMIE », combien peut-on former de mots de 6 lettres selon la répartition (1,1,1,1,1,1) ?

$p = 6$

$\Omega = \{E, C, O, N, M, I\}$; $Card(\Omega) = n = 6$; $p = 6$ selon la répartition : $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$

$\mathcal{P}_{6, (1,1,1,1,1,1)} = 6! / 1!\ 1!\ 1!\ 1!\ 1!\ 1! = 6! = 720 = P_6$: PSR.

3) Une chaîne de montage de véhicules identiques assure la sortie de 12 véhicules par jour dont 6 sont de couleur "Gris métallisé", 3 de couleur "Noire", 2 de couleur "Rouge et 1 de couleur "Blanche". Les véhicules d'une même couleur sont indiscernables. Ces véhicules sont ensuite garés les uns à côté des autres sur un parking de 12 places numérotées. De combien de manières visuellement différentes peut-on ranger ces véhicules sur le parking à la fin de la journée de travail ?

$\Omega = \{Gris, Noir, Rouge, Blanc\}$; $Card(\Omega) = n = 4$ couleurs ; $G:6, N:3, R:2, B:1$

$p = 12$ places ; répartition : $(6, 3, 2, 1)$

$\mathcal{P}_{12, (6,3,2,1)} = 12! / 6!\ 3!\ 2!\ 1! = 55\,440$ stationnements possibles.

UFR de sciences économiques et de gestion

2 Dispositions avec répétition

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$; $card(\Omega) = n$ éléments **tous distincts** , n et $p \in N$

avec p quelconque ($p \leq n$ **ou** $p > n$)

2.3 COMBINAISON (CAR) : *Une combinaison avec répétition est un sous-ensemble non ordonné de p éléments choisis parmi les n éléments distincts de Ω, et qui peuvent se répéter.*

$$\mathscr{C}_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,p!}$$

« Le nombre total de combinaisons avec répétition de p éléments parmi n ».

Exemple d'application : $\Omega = \{a, b, c\}$; $card(\Omega) = n = 3$

Les combinaisons possibles avec répétition de p = 2 éléments parmi les n = 3 éléments de Ω sont :

Diagramme arborescent

a → b {a , b}
a → a {a , a}
a → c {a , c}

b → a ~~{b , a}~~
b → b {b , b}
b → c {b , c}

c → a ~~{c , a}~~
c → c {c , c}
c → b ~~{c , b}~~

6 sous-ensembles au total

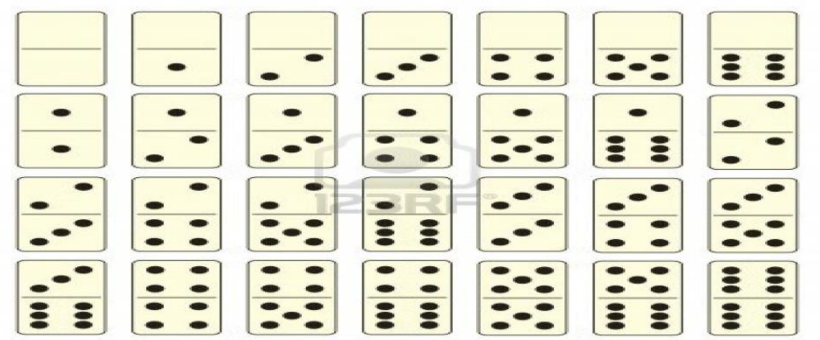
- Sous-ensembles non ordonnés, on ne tient pas compte de l'ordre des éléments : {a , b} = {b , a} , {a , c} = {c , a} et {b , c} = {c , b}

- Répétition d'élément : {a , a} , {b , b} , {c , c}

$\mathscr{C}_3^2 = C_4^2 = 4!/2!\,2! = 6$ combinaisons avec répétition

CAR : Exemples d'application

1) Combien y-a-t-il de pièces dans un jeu de domino ?



$\Omega = \{Blanc; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;

$card(\Omega) = n = 7$;

$p = 2 < n$

$\mathscr{C}_7^2 = C_8^2 = 8! / 6!\ 2! = 28$ *pièces.*

2) Jeu du "Mexico" : on lance deux dès. Avec les deux chiffres obtenus, on forme un nombre dont le chiffre des dizaines est le plus grand des deux chiffres obtenus.
Combien de nombres peut former ?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $Card(\Omega) = 6$; $p = 2$ chiffres ;

$\mathscr{C}_6^2 = C_7^2 = 7! / 5!\ 2! = 21$ *nombres possibles.*

A savoir : 11 ; 21 ; 22 ; 31 ; 32 ; 33 ; 41 ; 42 ; 43 ; 44 ; 51 ; 52 ; 53 ; 54 ; 55 ; 61 ; 62 ; 63 ; 64 ; 65 ; 66

3) De combien de façons différentes peut-on ranger 9 dossiers dans les 5 étagères d'une armoire ?

$Card(\Omega) = 5$ étagères ; $p = 9$ dossiers ;

$\mathscr{C}_5^9 = C_{13}^9 = 13! / 4!\ 9! = 715$ *rangements possibles.*

Analyse combinatoire & Dénombrement

	Sans remise	**Avec remise**
Avec ordre	A_n^p : ASR	$\mathscr{A}_n^p$: AAR
Avec ordre (totalité : p = n)	P_n : ASR	$\mathscr{P}_{p;(p_1,p_2,\dots,p_n)}$: PAR
Sans ordre	C_n^p : CSR	$\mathscr{C}_n^p$: CAR

Résumé des dispositions