UFR DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION

UNIVERSITÉ DE LYON

Support de cours

L3 – S5 : Statistique & Probabilités

Chapitre 2 : Calcul des probabilités

Année Universitaire : 2023-2024

R. Abdesselam

UFR de Sciences Economiques et de Gestion

Université Lumière Lyon 2, Campus Berges du Rhône

Rafik.abdesselam@univ-lyon2.fr

http://perso.univ-lyon2.fr/~rabdesse/Documents/

Chapitre 2 : Calcul des probabilités

Le calcul des probabilités a pour but de modéliser des phénomènes aléatoires ou non déterministes, c'est-à-dire qui dépendent du hasard.

- La notion de probabilité est le résultat d'un raisonnement dans lequel on évalue le nombre de chances d'obtenir la réalisation d'un événement.

- Lorsqu'un événement dépend du hasard, on peut avoir le sentiment qu'il est plus ou moins probable.

- La probabilité est un rapport de possibilités.

Comment donc définir la probabilité d'un événement ?

Chapitre 2 : Calcul des probabilités

Exemple et définitions :

Une expérience est répétée n fois.
A chaque essai, on note le résultat de l'expérience.
Soit n_S , le nombre d'apparitions de l'événement S « succès ».

Définition 1 :

$$0 \leq \quad P(S) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}} \quad \leq 1$$

Dans certaines expériences, le décompte des cas favorables et des cas possibles à la réalisation de l'événement S, n'est pas toujours facile à effectuer sauf dans le cas d'un ensemble fini (dénombrement),

Une autre définition s'impose, celle basée sur des résultats expérimentaux.

Chapitre 2 : Calcul des probabilités

Exemple et définitions :

Une expérience est répétée n fois.
A chaque essai, on note le résultat de l'expérience.
Soit n_S , le nombre d'apparitions de l'événement S « succès ».

Définition 2 :

Lorsque n est grand, on observe *EMPIRIQUEMENT* que la fréquence relative de succès :

$$f = n_s / n \quad \rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} (n_s / n) = P(S)$$

se rapproche d'une valeur limite et se STABILISE.

La fréquence relative f donne une approximation de P(S) d'autant meilleure que n est grand : $0 \leq P(S) \leq 1$.

C'est sur cette stabilité que repose toute la théorie du calcul des probabilités.

1.1 Définitions

- Une *Expérience aléatoire* est une expérience faite dans des conditions déterminées dont le résultat n'est pas connu à l'avance.

- On appelle *Ensemble fondamental*, noté en général Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Exemples :

Déterminer l'ensemble fondamental Ω de chacune des expériences suivantes.
On jette :

1- une pièce de monnaie : $\Omega_1 = \{P , F\}$; $card(\Omega_1) = |\Omega_1| = 2 < +\infty$ (fini)

2- un dé : $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $card(\Omega_2) = |\Omega_2| = 6 < +\infty$

3- une pièce de monnaie et un dé :

$\Omega_3 = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{P , F\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $card(\Omega_3) = card(\Omega_1) \times card(\Omega_2)$

$= \{(P,1), (P,2), (P,3), (P,4), \dots , (F,5), (F,6)\}$; $= C_2^1 C_6^1 = 12 < +\infty$

Produit cartésien de 2 ensembles — *produit des cardinaux.*

Exemples :

Déterminer l'ensemble fondamental Ω de chacune des expériences suivantes.
On jette :

4- Plusieurs fois un dé jusqu'à l'obtention d'un « 6 »

$\Omega_4 = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}^*$; $card(\Omega_4)$ **Infini**

Remarque :

A une même expérience aléatoire, on peut associer différents types d'éventualités, donc différents ensembles fondamentaux Ω. En effet,

Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie 2 fois de suite :

- On peut décrire la suite des résultats de chaque lancé. Dans ce cas :

$\Omega = \{ (P , P), (P , F) , (F , P) , (F , F) \}$; $card(\Omega) = \cancel{A}_2^2 = 2^2 = 4$

- Mais on peut également considérer le nombre de « pile » obtenu. Dans ce cas :

$\Omega = \{ 0, 1, 2 \}$; $card(\Omega) = 3$

1.2 Algèbre d'ensembles

- **Ensemble :** Collection d'objets ou d'événements appelés éléments.

Ω → *FINI* $\Omega = \{ a, b, c \}$; $card(\Omega) = 3 < +\infty$

Ω → *INFINI* → *dénombrable* $\Omega = \{ 1, \ldots, +\infty \} = IN^*$

INFINI → *non dénombrable* $\Omega =]0 ; 5] \subset IR$

- **Appartenance :** soit $\Omega = \{ a, b, c \}$

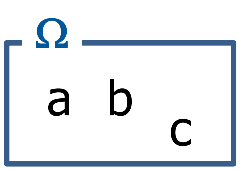


Diagramme de Venn

$a \in \Omega$: *l'élément a appartient à l'ensemble* Ω

$d \notin \Omega$: *l'élément d n'appartient pas à l'ensemble* Ω

- **Egalité de 2 ensembles :**

Deux ensembles A et B sont dits égaux s'ils sont constitués des mêmes éléments : A = B

- Tout élément de A est élément de B et réciproquement
- $\forall x \in A \Leftrightarrow x \in B$
- A et B sont confondus

- Ensemble vide **:**

Un ensemble vide, noté $\varnothing$, est un ensemble ne comprenant aucun élément.

Il est unique ; $\text{card}(\varnothing) = 0$

- Sous-ensemble **:** soit Ω un ensemble non vide ($\Omega \neq \varnothing$)

A est sous-ensemble de Ω si tout élément de A est élément de Ω

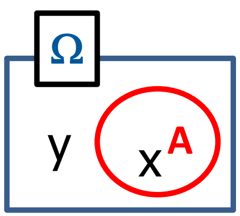


Diagramme de Venn

$A \subset \Omega$

- l'ensemble A est **inclus** dans Ω
- $\forall x \in A \Rightarrow x \in \Omega$; $y \in \Omega$, $y \notin A$
- tous les éléments de A sont dans Ω

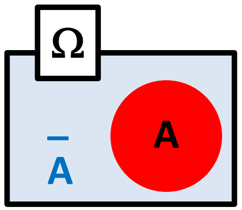
Propriétés de l'inclusion **:** quels que soient les ensembles A, B et C (tous $\neq \varnothing$)

- $A \subset A$ *de plus,* $\varnothing \subset A$
- *Si* $A \subset B$ *et* $B \subset A$ *alors* $A = B$
- *Si* $A \subset B$ *et* $B \subset C$ *alors* $A \subset C$

- **Complémentaire d'un ensemble :** soit Ω l'ensemble fondamental et A un sous-ensemble de non vide de Ω : $A \subset \Omega$.

Le complémentaire de A dans Ω, noté $\bar{A} = C_{\Omega}^{A}$

$\bar{A} = \{x, x \in \Omega \ / \ x \notin A\}$; $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$



Propriétés : quels que soient les ensembles A, B et Ω (tous $\neq \varnothing$)

- $\bar{\Omega} = \varnothing$; $\bar{\varnothing} = \Omega$; $\bar{\bar{A}} = A$
- si $A = B$ alors $\bar{A} = \bar{B}$
- si $A \subset B$ alors $\bar{B} \subset \bar{A}$

Soit $x \in \bar{B} \Rightarrow x \notin B$
et comme $A \subset B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$

1.3 Ensemble des parties d'un ensemble

Etant donné un ensemble Ω, on peut définir un nouvel ensemble, noté $\mathcal{P}(\Omega)$: l'ensemble des parties de Ω, constitué de tous les sous-ensembles possibles y compris Ω et $\varnothing$.

Exemple : $\Omega = \{a, b, c\}$ card$(\Omega) = 3$

$\mathcal{P}(\Omega) = \{ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} = \Omega \}$

Toutes les combinaisons possibles des n = 3 éléments de Ω

card$(\mathcal{P}(\Omega)) = 8$

Remarque :

Notations : $a \in \Omega$; $\{a\} \subset \Omega$; $\{a\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

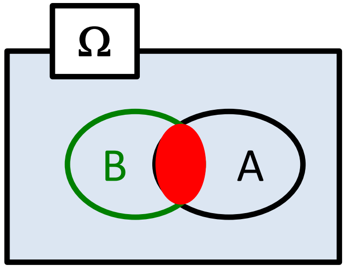
Propriété : si card$(\Omega) = n$ alors card$(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$

1.4 Opérations sur les ensembles

Définir de nouveaux ensembles à partir de sous-ensemble donnés dans Ω.

Intersection :

On appelle intersection de 2 ensemble A et B l'ensemble, noté $A \cap B$, des éléments appartenant à la fois à A et à B.



$A \cap B$

$$A \cap B = \{\, x,\ x \in \Omega \ /\ x \in A \ \ \textbf{et} \ \ x \in B \,\}$$

Evident, $\quad A \cap B \subset A \quad$ et $\quad A \cap B \subset B$

Remarque :

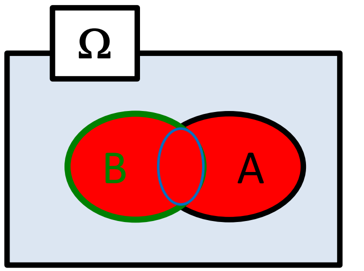
Si $A \cap B = \varnothing$ alors les ensembles A et B sont dit $\left\{ \begin{array}{l} \text{disjoints} \\ \text{Incompatibles} \\ \text{s'excluent mutuellement} \end{array} \right.$

Réunion **:**

On appelle réunion de 2 ensemble A et B l'ensemble, noté $A \cup B$, des éléments appartenant à l'un au moins des 2 ensembles.

$A \cup B = \{ x, x \in \Omega \ / \ x \in A$ **ou** $x \in B \}$

ou " non exclusif " : x peut appartenir à $A \cap B$; $x \in A \cap B$



$A \cup B$

Remarque :

Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$

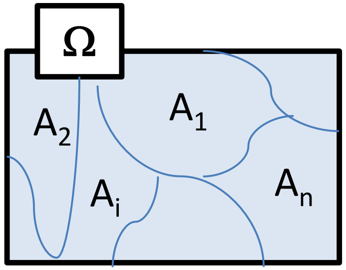
Evident, $\forall x,\ x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ et $x \in B$,
De plus $A \subset B \Rightarrow x \in A$

$\forall x,\ x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$,
De plus $A \subset B \Rightarrow x \in B$

1.5 Partition d'un ensemble « fondamental Ω » :

On dit que n sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de Ω forment une partition de Ω si et seulement si :

$$\begin{cases} A_i \neq \varnothing & \forall i,\ i = 1, \ldots, n \\ A_i \cap A_j = \varnothing & \forall i \neq j = 1, \ldots, n \\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega & \end{cases}$$



$(A_i)_{i=1,n}$ forment un système complet d'événements de Ω

Exemples :

Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé "équilibré". L'ensemble fondamental $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. Les sous-ensembles A1 = {Nbres pairs} et A2 = {Nbres impairs} forment-ils une partition de Ω ?

$$\begin{cases} A1 = \{2, 4, 6\} \neq \varnothing \quad ; \quad A2 = \{1, 3, 5\} \neq \varnothing \\ A1 \cap A2 = \varnothing \\ A1 \cup A2 = \Omega \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *Les événements A1 et A2 forment une partition de Ω.*

2. Les sous-ensembles A1 = {Nbres pairs} et A3 = {Nbres premiers} forment-ils une partition de Ω ?

$$\begin{cases} A1 = \{2, 4, 6\} \neq \varnothing \quad ; \quad A3 = \{1, 2, 3, 5\} \neq \varnothing \\ A1 \cap A3 = \{2\} \neq \varnothing \\ A1 \cup A3 = \Omega \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *Les événements A1 et A3 ne forment pas une partition de Ω.*

UFR de Sciences économiques et de Gestion

AUTRES OPERATIONS – PROPRIETES DES ENSEMBLES

$A \cup A = A$	loi idempotence	$A \cap A = A$
$A \cup \varnothing = A$ $A \cup \Omega = \Omega$	loi d'identité	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cap \Omega = A$
$A \cup \bar{A} = \Omega$	Complémentarité	$A \cap \bar{A} = \varnothing$
	$\Omega = \bar{\varnothing}$ et $\varnothing = \bar{\Omega}$	
$A \cup B = B \cup A$	loi commutative	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	loi associative	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributivité	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	loi de Morgan	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\forall x,\ x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B$
$\Leftrightarrow x \notin A$ **et** $x \notin B$
$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$

$\forall x,\ x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B$
$\Leftrightarrow x \notin A$ **ou** $x \notin B$
$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

Généralisation : $\overline{\bigcup_{i=1} A_i} = \bigcap_{i=1} \bar{A_i}$ et $\overline{\bigcap_{i=1} A_i} = \bigcup_{i=1} \bar{A_i}$

Exemple d'application 1 :

Soit A, B et C trois sous-ensembles (non vides) de Ω. Montrer que :

$$[A \cap (B \cup C)] \cup [A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})] = A$$

$$= A \cap [(B \cup C) \cup (\overline{B} \cap \overline{C})]$$

$$= A \cap [(B \cup C) \cup \overline{(B \cup C)}]$$ loi de Morgan

$$= A \cap \Omega$$

$$= A$$

Exemple d’application 2 :

Une urne contient 3 boules numérotées de 0, 1 et 2. On tire avec remise 2 boules. On note x le résultat du 1er tirage et y celui du second.

- Quel est l’ensemble fondamental Ω ?

$$\Omega = \{(x,y) \in \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} = \{0,1,2\}^2 \;/\; 0 \le x \le 2 \text{ et } 0 \le y \le 2\}$$

$$= \{ (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2) \} \;;\; \text{card}(\Omega) = \cancel{A}_3^2 = 3^2 = 9$$

- Déterminer les éventualités des trois sous-ensembles suivants :

$A = \{ (x, y) \in \Omega \;/\; x + y \ge 3 \} = \{ (1,2), (2,1), (2,2) \}$

$B = \{ (x, y) \in \Omega \;/\; x.y < 1 \} = \{ (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (2,0) \}$

$C = \{ (x, y) \in \Omega \;/\; y = 2x \} = \{ (0,0), (1,2) \}$

- Caractériser le sous-ensemble de Ω :

$$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = (\overline{A \cup B}) \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C} = \{ (1,1) \}$$

- Déterminer le sous-ensemble D pour que A, B et D forment une partition de Ω.

$D = \{ (1,1) \}$?

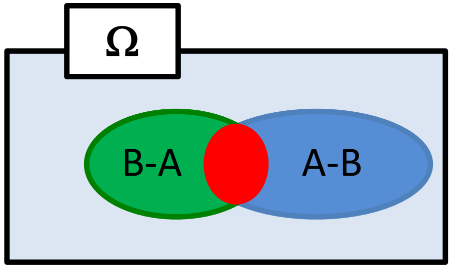
$$\begin{cases} A \neq \varnothing \;;\; B \neq \varnothing \;;\; D \neq \varnothing \\ A \cap B = \varnothing \;;\; A \cap D = \varnothing \;;\; B \cap D = \varnothing \\ A \cup B \cup D = \Omega \end{cases}$$

1.6 Différence de 2 ensembles

On appelle différence de deux ensembles A et B pris dans cette ordre l'ensemble, noté $A - B$, des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.

$$A - B = \{ x ,\ x \in \Omega \ / \ x \in A \ \textbf{ et } \ x \notin B \} = A \cap \bar{B}$$

$$B - A = \{ x ,\ x \in \Omega \ / \ x \in B \ \textbf{ et } \ x \notin A \} = B \cap \bar{A}$$



$A \cap B$

Remarques 1 : il est évident de vérifier que :

- $A - B = A \cap \bar{B}$ $\quad \forall x ,\ x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in A \cap \bar{B}$
- $A - B = C_A^{A \cap B}$

Evident, cf. graphique

$$\forall x ,\ x \in C_A^{A \cap B} \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in \overline{A \cap B}$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in \bar{A} \cup \bar{B} \Leftrightarrow x \in A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \quad \text{(loi de Morgan)}$$

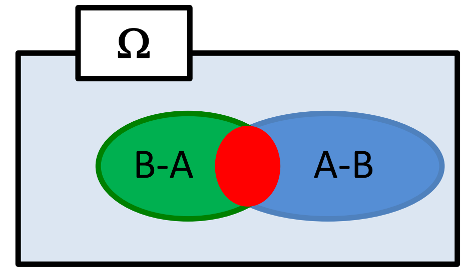
$$\Leftrightarrow x \in (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow x \in \varnothing \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap \bar{B} = A - B$$

- A et B sont disjoints alors $A - B \neq B - A$

A et B sont disjoints $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$ alors $A - B = A \neq B - A = B$

On appelle différence <u>symétrique</u> de deux ensembles A et B l'ensemble, noté $A \,\Delta\, B$, constitué des éléments de A qui n'appartiennent pas à B et des éléments de B qui n'appartiennent pas à A.

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$$



$A \cap B$

Remarques 2 : Vérifier que :

$$A - B = \overline{\bar{A} \cup B}$$

$$A - B = A \cap \bar{B} = \bar{\bar{A}} \cap \bar{B} = \overline{\bar{A} \cup B}$$ loi de Morgan

$$A \cup B = (A \,\Delta\, B) \cup (A \cap B)$$

$$= (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$$

$$= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})$$

Réunion de 3 sous-ensembles 2 à 2 disjoints

1.7 Algèbre des événements (vocabulaire)

Un événement aléatoire est un ensemble ou, plus exactement un sous-ensemble de l'ensemble fondamental Ω. Il peut contenir un ou plusieurs résultats de l'épreuve.

L'ensemble de tous les événements aléatoires possibles est donc égal à l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω.

Exemple d'application :

Une urne contient 3 boules numérotées de 0, 1 et 2. On tire avec remise 2 boules. On note x le résultat du 1er tirage et y celui du second.

$$\Omega = \{ (0,0) , (0,1) , (0,2) , (1,0) , (1,1) , (1,2) , (2,0) , (2,1) , (2,2) \} \; ; \; card(\Omega) = 9$$

Evénements particuliers :

- Evénement élémentaire : singleton de Ω ; sous-ensemble qui contient un seul résultat d'épreuve.

Décrire l'événement A : « la somme des points est égale à zéro »

$$A = \{ (x , y) \in \Omega \; / \; x + y = 0 \} = \{ (0,0) \} \subset \Omega$$

1 seul couple ; 1 seule éventualité

Exemple d'application :

$$\Omega = \{ (0,0) , (0,1) , (0,2) , (1,0) , (1,1) , (1,2) , (2,0) , (2,1) , (2,2) \}$$

- Evénement <u>impossible</u> : événement qui n'est jamais réalisé.
  C'est l'ensemble vide : $\varnothing$

Décrire l'événement B : « la somme des points est strictement supérieure à 4 »

$$B = \{ (x , y) \in \Omega \ / \ x + y > 4 \} = \varnothing$$

- Evénement <u>certain</u> : événement qui est toujours réalisé.
  C'est l'ensemble fondamental : Ω

Décrire l'événement C : « la somme des points est inférieure ou égale à 4 »

$C = \{ (x , y) \in \Omega \ / \ x + y \leq 4 \} = \Omega$ Tous les cas possibles

- Evénement <u>contraire</u> : l'événement contraire d'un événement est le complémentaire de cet événement dans Ω.

L'événement D est réalisé $\Leftrightarrow$ $\overline{D}$ n'est pas réalisé ; $D \cup \overline{D} = \Omega$; $D \cap \overline{D} = \varnothing$

Décrire l'événement contraire de D : « la somme est inférieure ou égale à 2 »

$D = \{ (x , y) \in \Omega \ / \ x + y \leq 2 \}$; $\overline{D} = \{ (x , y) \in \Omega \ / \ x + y > 2 \} = \{ (1,2) , (2,1) , (2,2) \}$

Exemple d'application :

Une urne contient 3 boules numérotées de 0, 1 et 2. On tire avec remise 2 boules. On note x le résultat du 1er tirage et y celui du second.

$$\Omega = \{ (0,0) , (0,1) , (0,2) , (1,0) , (1,1) , (1,2) , (2,0) , (2,1) , (2,2) \}$$

- **Incompatibilité d'événements :** 2 événements sont dits incompatibles (disjoints ou mutuellement exclusifs) s'ils ne peuvent être réalisés en même temps.

Les événements E : « obtenir une somme inférieure ou égale à 2 »
F : « obtenir un produit égal à 2 »
sont-ils incompatibles ?

E et F sont incompatibles $\Leftrightarrow$ $E \cap F = \emptyset$

$$E = \{ (x , y) \in \Omega \ / \ x + y \leq 2 \} = \{ (0,0) , (0,1) , (0,2) , (1,0) , (1,1) \}$$

$$F = \{ (x , y) \in \Omega \ / \ x \, . \, y = 2 \} = \{ (1,2) , (2,1) \}$$

2. Espace probabilisable

Tribu d'événements :

Une famille @ de sous-ensembles de Ω est une tribu de Ω si :

1) $\Omega \in @$,
2) $\forall A \in @ , \bar{A} \in @$
3) $\forall A \in @$ et $\forall B \in @$, $A \cup B \in @$
4) $\forall (A_i)_{i \in IN}$ événements de @, $\bigcup_{i \in IN} A_i \in @$

On dit alors que @ est stable par passage du complémentaire, stable pour l'union et pour l'union dénombrable.

Remarque :

$\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω (fini ou infini dénombrable) est une tribu @ de parties de Ω : $\mathcal{P}(\Omega) = @$

Définition :

Le couple (Ω, @) est appelé espace probabilisable.

Ω : ensemble fondamental des résultats possibles
@ : tribu d'événements de Ω, exemple $\mathcal{P}(\Omega)$.

3 Espace probabilisé : Cas général

Fini,
Infini dénombrable,
Infini

Définition :

On appelle probabilité sur un espace probabilisable (Ω, @), toute application P, de @ dans [0 , 1] vérifiant les 3 axiomes suivants :

$$P : @ \longrightarrow [0\,,\,1] \subset IR$$
$$A \qquad P(A)$$

1) $P(\Omega) = 1$

Fini — 2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ — A et B sont 2 événements disjoints de @

Infini dénombrable — 3) $P(\bigcup_{i \in IN} A_i) = \sum_{i \in IN} P(A_i)$ — $(A_i)_{i \in IN}$, une famille dénombrable d'événements 2 à 2 disjoints de @.

(Ω, @ , P) est alors appelé espace probabilisé, et pour tout événement A $\in$ @, le réel P(A) $(0 \leq P(A) \leq 1)$ est appelé probabilité de l'événement A.

3.1 Espace probabilisé fini

Soit $\Omega = \{ w_1 , w_2 ,.., w_n \}$ un ensemble fondamental fini et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

- $(\Omega, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega))$: espace probabilisable fini.
- Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$: espace probabilisé fini.
- les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont des événements.
- les singletons $\{ w_i \}$ de Ω sont des événements élémentaires.
- les singletons $\{ w_i \} \in \mathcal{P}(\Omega)$.
- Pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$: $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\varnothing) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \Omega = \Omega \cup \varnothing \quad ; \quad \Omega \text{ et } \varnothing \text{ sont disjoints} \\ P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing) \quad \text{(axiome 2)} \\ P(\Omega) = 1 \text{ (axiome 1)} \end{array}\right\} \Rightarrow P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$$

Exemple :

Jet d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{ p , f \}$; $P(\Omega) = \{ \emptyset, \{p\}, \{f\}, \{p,f\} \}$

Si la pièce n'est pas truquée : $P(\{p\}) = P(\{f\}) = 1/2$
(Probabilité P)

Si la pièce est truquée : $P'(\{p\}) = \alpha$ et $P'(\{f\}) = 1 - \alpha$
(Probabilité P') (avec $\alpha \neq 1/2$ et $\alpha \in]0 , 1[$).

Choix de la probabilité :

C'est un problème expérimental basé sur :

- ✓ le bon sens et l'intuition,
- ✓ la connaissance a priori du phénomène aléatoire,
- ✓ la comparaison entre un échantillon et une loi de probabilité.

Propriétés des probabilités

Soit (Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$, P) un espace probabilisé fini et soient A et B deux événements. On a :

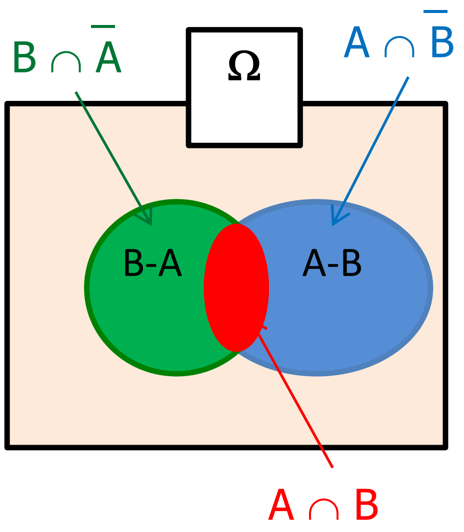
1) Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

2) $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

4) $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B)$

5) $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$



- n = 3 événements quelconques A, B et C :

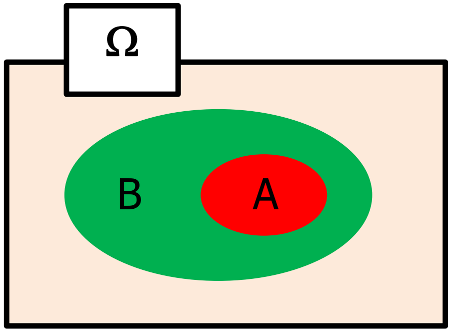
  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

- Généralisation : *(Poincaré – formule du crible)*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Propriétés des probabilités

Soit (Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$, P) un espace probabilisé fini et soient A et B deux événements non vides. On a :



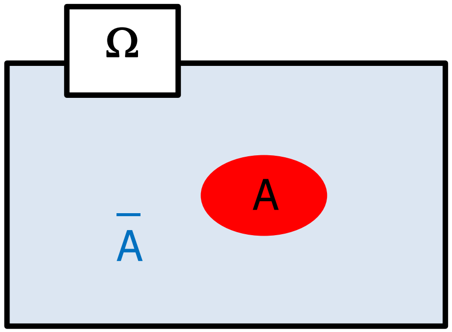
$(B \cap \bar{A}) \cap A = \varnothing$

1) Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Si $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \cap \bar{A})$; A et $(B \cap \bar{A})$ sont disjoints

Alors, $P(B) = P[A \cup (B \cap \bar{A})] = P(A) + \underbrace{P(B \cap \bar{A})}_{\geq 0} \geq P(A)$

2) $P(A) = 1 - P(\bar{A})$



$A \cap \bar{A} = \varnothing$

Comme, $\Omega = A \cup \bar{A}$; A et $\bar{A}$ sont disjoints

Alors, $P(\Omega) = 1 = P[A \cup \bar{A})] = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

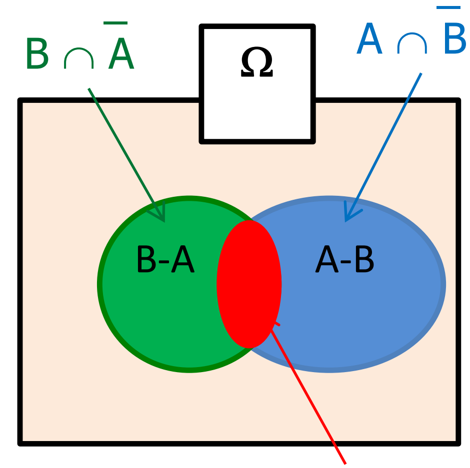
3) $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

Décomposer l'événement A en 2 événements incompatibles :

$A = (A \cap B) \cup (A - B)$; $A \cap B$ et $A - B$ sont disjoints

Alors, $P(A) = P[\,(A \cap B) \cup (A - B)\,] = P(A \cap B) + P(A - B)$

$\Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



4) $P(A \,\Delta\, B) = P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B)$

Décomposer l'événement $(A \,\Delta\, B)$ en 2 événements incompatibles :

$A \,\Delta\, B = (B - A) \cup (A - B)$; $B - A$ et $A - B$ sont disjoints

Alors, $P(A \,\Delta\, B) = P[\,(B - A) \cup (A - B)\,] = P(B - A) + P(A - B)$

$= P(B - A) + P(A - B) = P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B)$

5) $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

L'événement $A \cup B$ se décompose en 3 événements mutuellement incompatibles :

$A \cup B = (B - A) \cup (A \cap B) \cup (A - B)$ 2 à 2 disjoints

Alors, $P(A \cup B) = P[(B - A) \cup (A \cap B) \cup (A - B)\,] = P(B - A) + P(A \cap B) + P(A - B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3.1.1 Probabilité sur un espace probabilisé fini

$\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini ;

$card(\Omega) = n$; $card(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$

Cas général

La probabilité P d'un événement élémentaire $\{w_i\}$ est définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ par :

$$P(\{w_i\}) = p_i \quad (i=1,n) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} ① \; p_i \in [0,1] & 0 \le p_i \le 1 \\ ② \; \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 = P(\Omega) & \sum p_i = 1 \end{cases}$$

Principe des probabilités totales

Dans ce cas, la probabilité P d'un événement A est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \qquad P(A) = \sum_{w_i \in A} p_i$$

Exemple d'application :

On lance 3 pièces de monnaies et on observe le nombre de "face" obtenu.

a) Quel est l'ensemble fondamental Ω ? $\Omega = \{ 0, 1, 2, 3 \}$; $card(\Omega) = 4$

b) On munit Ω de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. $card(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^4 = 16$

Montrer que si on pose : P(0) = P(3) = 1/8 et P(1) = P(2) = 3/8, on définit ainsi une probabilité.

w_i	$P_i = P(\{w_i\})$
0	$p_0 = P(0) = 1/8$
1	$p_1 = P(1) = 3/8$
2	$p_2 = P(2) = 3/8$
3	$p_3 = P(3) = 1/8$

$\forall i = 0, 1,2$ et 3
$0 \leq p_i \leq 1$

$\sum p_i = 1 = P(\Omega)$: principe des probabilités totales

c) Soient les événements : A = " on obtient au moins une face"
B = " on obtient 3 faces ou 3 piles"

Calculer P(A) et P(B).

$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = 3/8 + 3/8 + 1/8 = 7/8 = 1 - P(0)$

$P(B) = P(3) + P(0) = 1/8 + 1/8 = 1/4$

Cas particulier : ″Equiprobabilité″

$\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ fini à n résultats équiprobables ;
(Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$, P) un espace probabilisé fini ; $card(\Omega) = n$; $card(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$

Si les événements élémentaires $\{w_i\}$ sont considérés par l'expérience comme équiprobables, alors la probabilité P d'un événement élémentaire $\{ w_i \}$ est définie sur (Ω , $\mathcal{P}(\Omega)$) par :

$$P(\{ w_i \}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{card(\Omega)} \qquad \text{pour tout } i=1,n$$

① $0 \leq p_i = 1/n \leq 1$ ② $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} 1/n = n / n = 1$

Dans ce cas, la probabilité P d'un événement $A \in P(\Omega)$ est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \qquad P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{Nbre de cas favorables}}{\text{Nbre de cas possibles}}$$

Exemple d'application :

On choisit au hasard 2 articles d'un lot de 12 articles, dont 4 sont défectueux. Calculer les probabilités des événements suivants :

A = { les 2 sont défectueux } ; B = { Aucun des 2 n'est défectueux }

C = { 1 seul est défectueux } ; D = { au moins 1 article est défectueux }

E = { au plus 1 article est défectueux }

card(Ω) = 12 fini ;
Chaque article a la même probabilité d'être choisi : équiprobabilité

Nombre de cas favorables à la réalisation de l'événement A : CSR $C_4^2 = 6$

Nombre de cas possibles de 2 articles parmi 12 : CSR $C_{12}^2 = 66$

$$P(A) = C_4^2 \;/\; C_{12}^2 = 6/66 = 9.09\%$$

$$P(B) = C_8^2 \;/\; C_{12}^2 = 28/66 = 42.42\%$$

$$P(C) = C_4^1\, C_8^1 \;/\; C_{12}^2 = 32/66 = 48.48\%$$

$$P(D) = P(C \cup A) = P(C) + P(A) = 57.57\%$$

$$P(E) = P(C \cup B) = P(C) + P(B) = 90.91\%$$

3.2 Ensemble fondamental Ω est infini dénombrable

Soit $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{ w_i \}$; $@ = \mathcal{P}(\Omega)$

La probabilité P est définie sur $(\Omega , \mathcal{P}(\Omega))$ par la suite $(p_i)_{i \in IN}$ des probabilités élémentaires $p_i = P(\{ w_i \})$ telle que :

$$\begin{cases} ① \quad p_i \in [0, 1] \\ ② \quad \sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1 = P(\Omega) \end{cases}$$

$0 \leq p_i \leq 1$

La somme à l'infini converge vers 1

Dans ce cas, la probabilité P d'un événement A est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \qquad P(A) = \sum_{w_i \in A} p_i$$

Exemple d'application :

Dans une urne il y a 4 boules rouges et 6 boules vertes non discernables par ailleurs. On tire une boule au hasard. Si elle est rouge l'expérience s'arrête. Si elle est verte, on la remet dans l'urne et on recommence un tirage. Définir l'espace probabilisé.

Espace probabilisé (Ω , @ , P) :

- $\Omega = \{1, 2, \ldots., +\infty\} = IN^* = IN_{-\{0\}}$

  "Nombre de tirages jusqu'à l'obtention d'une boule Rouge""

- card(Ω) = infini dénombrable ; @ = $\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(IN^*)$

- Chaque boule à la même probabilité d'être choisie : équiprobabilité

  $P(R) = 2/5 = p$; $P(V) = 3/5 = 1 - p = q$ — 2 événements ou résultats possibles R ou V avec $p + q = 1$

Exemple de loi de probabilité : loi géométrique

soit X : "Nombre de tirages jusqu'à l'obtention d'une boule Rouge"

$$P(X = k) = p\, q^{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$

"probabilité d'avoir la boule rouge au $k^{ème}$ tirage"

3.3 Ensemble fondamental Ω est infini

Par exemple, Ω est un intervalle de IR :
Soit =] a , b] = { w $\in$ IR / a < w $\leq$ b } ; @ = B_{IR} *(tribu borélienne)*

Dans ce cas, on peut par exemple, définir sur B_{IR} , la probabilité d'un événement A =] x , y] $\in$ B_{IR} par :

$$P(A) = P(\,]x , y]\,) = \frac{y - x}{b - a} \qquad (\, y \geq x \text{ et } b > a \,)$$

Cette définition vérifie bien les axiomes d'une probabilité.

Exemple de loi de probabilité dite Uniforme sur l'intervalle]a , b]

Exemple d'application :

Une personne arrive à un arrêt de bus, qui est desservi régulièrement toutes les 15 minutes, et chronomètre le temps d'attente jusqu'à l'arrivée du bus.
Calculer la probabilité que cette personne attende moins de 5 minutes.

Espace probabilisé : (Ω = [0 , 15] $\subset$ IR infini , @ = B_{IR} , P)

A : événement attendre moins de 5 mn ; x : temps d'attente

P(A) = P([0 , x[ ) = x / 15 = 5 / 15 = 1/3

4 Probabilités conditionnelles

4.1 Introduction

Expérience : Jet d'un dé équilibré. Soient les événements suivants :

A : « on obtient un nombre inférieur ou égal à 5 »

B : « on obtient un nombre supérieur strictement à 4 »

Supposons que l'on sache que l'événement A est réalisé, le résultat w du lancer du dé est un élément de A :

$w \in A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $P(A) = 5/6 = C_5^1 / C_6^1$ équiprobabilité

Pour que l'événement B soit réalisé, il faut que le résultat w du lancer du dé soit un élément de B :

$w \in B = \{5, 6\}$; $P(B) = 2/6 = C_2^1 / C_6^1$ équiprobabilité

Mais pour que l'événement B soit réalisé sachant que l'événement A est réalisé, il faut que le résultat w du lancer du dé soit un élément de :

Or, $A \cap B = \{5\}$ donc $P(A \cap B) = 1/6$ de plus $P(A) = 5/6$

On a donc bien : $P(B/A) = 1/5 = P(A \cap B) / P(A) = (1/6) / (5/6) = 1/5$

4.2 Définition

Soit (Ω, @, P) un espace probabilisé. On appelle probabilité conditionnelle d'un événement B sachant que l'événement A est réalisé, le nombre :

$$\boxed{P_A(B) = P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{si } P(A) \neq 0}$$

Remarque : P_A est-elle une probabilité sur l'espace probabilisable (Ω, @) ?

Vérifions les axiomes de la définition d'une probabilité :

$$P(./A) : \quad @ \longrightarrow [0\,,1]$$
$$B \qquad\qquad P_A(B) = P(B/A)$$

Axiome 0 : $A \cap B \subset \Omega \;\Rightarrow\; 0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) \;\Rightarrow\; 0 \leq P(A \cap B) / P(A) = P(B/A) \leq 1$

Axiome 1 : $P(\Omega/A) = P(\Omega \cap A) / P(A) = P(A) / P(A) = 1$

Axiomes 2-3 : $(B_i)_{i=1,IN}$ famille d'événements fini ou infini dénombrable 2 à 2 dijoints :

$$P(\bigcup_{i \in IN} B_i \;/A) = P[(\bigcup_{i \in IN} B_i) \cap A)] / P(A)$$

$$= P[\bigcup_{i \in IN} (B_i \cap A)] / P(A)$$

($B_i \cap A$) et ($B_j \cap A$) sont disjoints vu que $B_i \cap B_j = \varnothing$ (disjoints)

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i \cap A) / P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i / A)$$

Propriétés :

- $P_B(B) = P(B / B) = 1$

  Evident, $P_B(B) = P(B / B) = P(B \cap B) / P(B) = P(B) / P(B) = 1$

- $P_A(\overline{B}) = P(\overline{B} / A) = 1 - P(B / A) = 1 - P_A(B)$

$$
\begin{aligned}
P_A(\overline{B}) &= P(\overline{B} / A) = P(\overline{B} \cap A) / P(A) \\
&= P(A - B) / P(A) \\
&= [\, P(A) - P(A \cap B) \,] / P(A) = P(A) / P(A) - P(A \cap B) / P(A) \\
&= 1 - P(A \cap B) / P(A) = 1 - P(B / A) = 1 - P_A(B)
\end{aligned}
$$

- $P(B_1 \cup B_2 / A) = P(B_1 / A) + P(B_2 / A) - P(B_1 \cap B_2 / A)$

$$
\begin{aligned}
P(B_1 \cup B_2 / A) &= P[\, (B_1 \cup B_2) \cap A) \,] / P(A) = P[\, (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \,] / P(A) \\
&= [\, P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) - P[(B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A)] \,] / P(A) \\
&= [\, P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) - P(B_1 \cap B_2 \cap A) \,] / P(A) \\
&= P(B_1 \cap A) / P(A) + P(B_2 \cap A) / P(A) - P(B_1 \cap B_2 \cap A) / P(A) \\
&= P(B_1 / A) + P(B_2 / A) - P(B_1 \cap B_2 / A)
\end{aligned}
$$

Principe des probabilités composées :

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ alors $\boxed{P(B \cap A) = P(B / A)\,P(A) = P(A / B)\,P(B)}$

Evidente, cf. définition

Remarque :

Dans le cas de 3 événements A, B et C de probabilités non nulles, on peut écrire :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B / A)\,P[C / (A \cap B)]$$

$$\begin{aligned} P(A)\,P(B / A)\,P[C / (A \cap B)] &= P(A)\,P(A \cap B)\,P[C / (A \cap B)] \;/\; P(A) \\ &= P(A \cap B)\,P[C / (A \cap B)] \\ &= P(A \cap B)\,P(A \cap B \cap C) / P(A \cap B) \\ &= P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Exemple d'application :

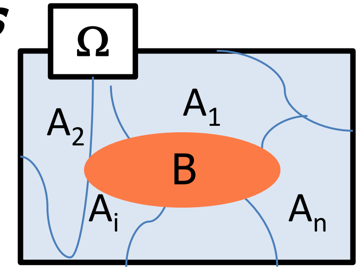
Dans un jeu de 32 cartes, mon adversaire tire une carte au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il ait tiré une dame de Pique sachant qu'un coup d'œil indiscret m'a permis de distinguer une figure à Pique ou à Trèfle ?

3 Figures : Vallet, Dame, Roi ; P : pique et T : trèfle

$$P[D_p / (F_P \cup F_T)] = \frac{P[D_p \cap (F_P \cup F_T)]}{P(F_P \cup F_T)} = \frac{P[\underbrace{(D_p \cap F_P)}_{D_p} \cup \underbrace{(D_p \cap F_T)}_{\varnothing}]}{P(F_P) + P(F_T) - P\underbrace{(F_P \cap F_T)}_{\varnothing}}$$

$$= \frac{P(D_p)}{P(F_P) + P(F_T)} = \frac{1/32}{(3/32) + (3/32)} = \frac{1}{6} = 16.67\%$$

$$P(D_p) = 1/32 = 3.12\% \quad < \quad P[D_p / (F_P \cup F_T)] = 16.67\%$$



4.3 Théorème de Bayes

Propriété :

Soient $(A_i)_{i\in I}$, un système complet d'événements de probabilités non nulles. Pour tout événement B, on a :

- $P(B) = \sum_{i\in I} P(B / A_i)\, P(A_i)$ (Formule des probabilités totales)

$$P(B) = P(\Omega \cap B) = P[\,(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap B\,]$$

$$= P[\,\bigcup_{i\in I} (A_i \cap B)\,]$$

$$= \sum_{i\in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i\in I} P(B / A_i)\,.\,P(A_i)$$

$(A_i \cap B)$ et $(A_j \cap B)$ sont tous 2 à 2 disjoints vu que :
$A_i \cap A_j = \varnothing$ (disjoints)
$(A_i)_{i\in I}$ forment une partition de Ω.

d'où la **formule de BAYES** (probabilité des causes)

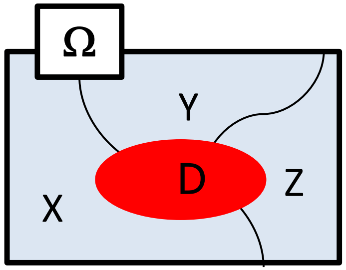
- $$P(A_j / B) = \frac{P(B / A_j)\, P(A_j)}{\sum_{i\in I} P(B / A_i)\, P(A_i)} = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$$

C'est la probabilité que la cause A_j soit responsable de la survenue de l'événement B, sachant que l'événement B s'est réalisé.

Exemple d'application :

On suppose que 3 types de microprocesseurs utilisés dans la fabrication de micro-ordinateurs se partagent le marché à raison :

Type	Part	Défaut de fabrication
X	$P(X) = 25\%$	$P(D/X) = 5\%$
Y	$P(Y) = 35\%$	$P(D/Y) = 4\%$
Z	$P(Z) = 40\%$	$P(D/Z) = 2\%$



On prélève au hasard un microprocesseur dans un lot dans les proportions indiquées pour les types X, Y et Z.

a) Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?

$$P(D) = P(D/X)\,P(X) + P(D/Y)\,P(Y) + P(D/Z)\,P(Z)$$
$$= 0.05 \times 0.25 + 0.04 \times 0.35 + 0.02 \times 0.40 = 3.45\%$$

b) Sachant que le microprocesseur présente un défaut de fabrication, quelle est la probabilité qu'il soit de type X ?

$$P(X/D) = \frac{P(X \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/X)\,P(X)}{P(D)} = \frac{0.05 \times 0.25}{0.0345} = 36.23\%$$

De même,
$P(Y/D) = 40.58\%$
$P(Z/D) = 23.19\%$

Bien que le type X ne représente que le quart du marché P(X) = 25%,
il représente 36,23% des microprocesseurs présentant un défaut de fabrication sur le marché.

5 Indépendance en probabilité

5.1 Indépendance de deux événements

Définition :

Deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité P, si la probabilité de réalisation de l'un n'est pas influencée par la réalisation de l'autre c'est-à-dire :

$$P(A / B) = P(A) \quad \text{et} \quad P(B / A) = P(B)$$

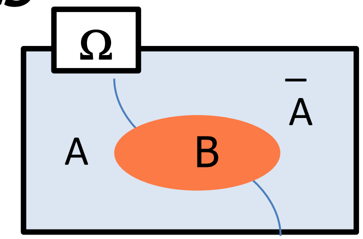
ce qui est équivalent à : $\boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P(B)}$

Remarque : L'indépendance n'est pas une qualité intrinsèque des événements. Elle dépend de la probabilité considérée.

Propriétés :

- Si A et B sont indépendants $\Rightarrow \begin{cases} A \text{ et } \bar{B} \text{ sont indépendants} \\ \bar{A} \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ \bar{A} \text{ et } \bar{B} \text{ sont indépendants} \end{cases}$

Evidentes, cf. exercice TD



Propriété : (Formule des probabilités totales)

➢ $P(B) = P(B / A)\, P(A) + P(B / \bar{A})\, P(\bar{A})$

A et $\bar{A}$ non vides, forment une partition de Ω : $A \cap \bar{A} = \varnothing$; $A \cup \bar{A} = \Omega$

$$P(B) = P(\Omega \cap B) = P[\,(A \cup \bar{A}) \cap B\,]$$

$$= P[\,(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)\,]$$

$(A \cap B)$ et $(\bar{A} \cap B)$ sont disjoints

$$= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B / A)\, P(A) + P(B / \bar{A})\, P(\bar{A})$$

Remarques :

➢ **<u>Ne pas confondre</u>** événements <u>incompatibles</u> et événements <u>indépendants en probabilité</u>.

<u>Incompatibles</u> : les deux événements ne peuvent se réaliser simultanément
$A \cap B = \varnothing$ d'où $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$

<u>Indépendance</u> : la probabilité de réalisation d'un événement n'est pas modifiée par la réalisation de l'autre : $P(A / B) = P(A)$ et $P(B / A) = P(B)$

➢ Les événements A et B sont dits dépendants en probabilité si :
$P(A \cap B) \neq P(A)\, P(B)$ ou $P(A / B) \neq P(A)$ ou $P(B / A) \neq P(B)$.

Exemple d'application 1 :

Pour une promotion d'étudiants, on estime que la probabilité d'obtenir la moyenne :

- ✓ en Mathématiques est égale à 0,40
- ✓ en Economie est égale à 0,70
- ✓ en Mathématiques ou en Economie est égale à 0,82

$P(M) = 40\%$
$P(E) = 70\%$
$P(M \cup E) = 82\%$

a) Les événements M et E sont-ils indépendants ? Incompatibles ?

- $P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E)$

  $\Rightarrow P(M \cap E) = P(M) + P(E) - P(M \cup E) = 0.4 + 0.7 - 0.82 = 28\%$

  $P(M)\,P(E) = 0.4 \times 0.7 = 28\%$

  $P(M \cap E) = P(M)\,P(E)$: les événements M et E sont indépendants

- $M \cap E \neq \varnothing$; $P(M \cap E) \neq 0$: les événements M et E ne sont pas incompatibles

b) On prévient un étudiant qu'il n'a obtenu la moyenne qu'à au moins une des 2 matières ; calculer la probabilité que ce soit en Mathématiques.

$$P[(M / (M \cup E)] = \frac{P[M \cap (M \cup E)]}{P(M \cup E)} = \frac{P[\overbrace{\overbrace{(M \cap M)}^{M} \cup (M \cap E)}^{M}]}{P(M \cup E)} = \frac{P(M)}{P(M \cup E)} = \frac{0.4}{0.82} = 48.78\%$$

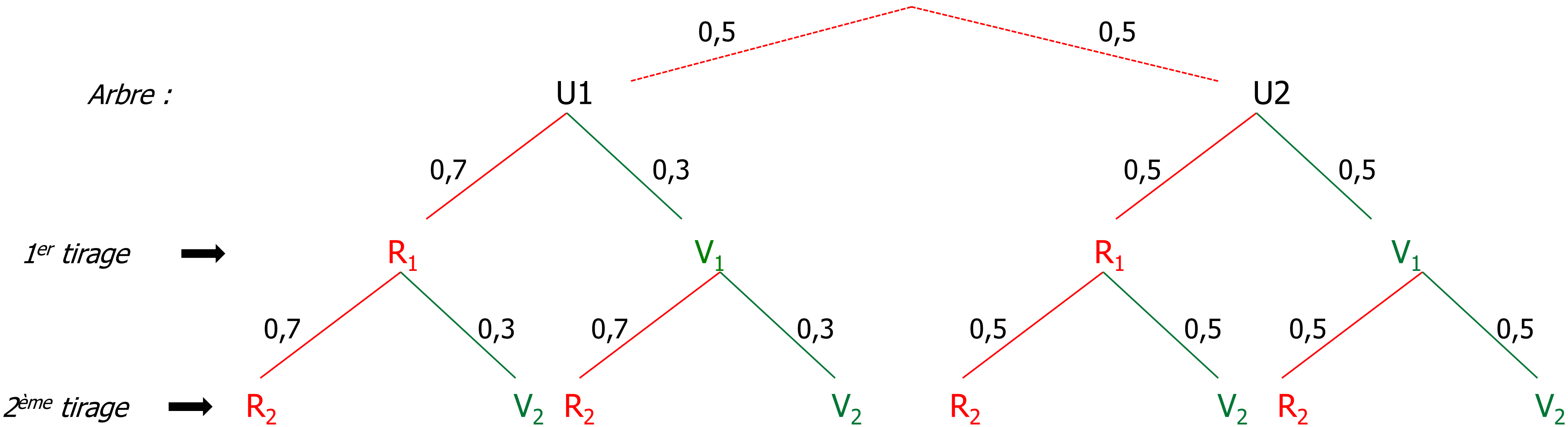
Exemple d'application 2 :

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune 10 boules. L'urne U_1 contient 7 Rouges et 3 Vertes et l'urne U_2 contient 5 Rouges et 5 Vertes. On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie. On note les événements suivants :

R_1 - "obtenir une boule rouge au 1^er^ tirage" et R_2 - "obtenir une boule rouge au 2^ème^ tirage"

Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ?

Arbre :



- $P(R_1) = 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}6$
  $P(R_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}6$
- $P(R_1 \cap R_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}37$
- $P(R_1 \cap R_2) \neq P(R_1)\, P(R_2) \quad \Rightarrow$ les événements R_1 et R_2 **ne sont pas indépendants**

Remarque : *ce résultat peut paraître surprenant. Et non, il est dû tout simplement à la composition différente du nombre de boules Rouges et Vertes dans les 2 urnes et au fait qu'on ne sait pas, a priori, dans quelle urne seront effectués les tirages.*

5.2 Indépendance d'une famille d'événements

Soient $(A_i)_{i\in I}$, une famille d'événements de probabilités non nulles.

- On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants pour la probabilité P si :

$$P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i) \qquad \text{pour tout famille finie } J \subset I$$

- On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements 2 à 2 indépendants pour la probabilité P si :

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\,P(A_j) \qquad \text{pour tout } (i\,,\,j) \in I^2 \text{ tel que } i \neq j$$

Par exemple, dans le cas de 3 événements A, B, et C, ils sont dits

2 à 2 indépendants		Mutuellement indépendants
$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ $P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$ $P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$	$\Leftarrow$	$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ $P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$ $P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$ $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$

Exemple d'application :

On lance 2 jetons identiques à côtés numérotés 1 et 2. Soient les événements :

- ✓ A : le premier chiffre obtenu est pair
- ✓ B : le deuxième chiffre obtenu est impair
- ✓ C : la somme des 2 chiffres est paire

Les 3 événements A, B et C sont-ils 2 à 2 indépendants ? Sont-ils mutuellement indépendants ?

$\Omega = \{ 1, 2 \}$; $card(\Omega) = 2$; nombre de couples possibles AAR : $2^2 = 4$

$A = \{ (2,1), (2,2) \}$; $P(A) = 1/2$
$B = \{ (1,1), (2,1) \}$; $P(B) = 1/2$
$C = \{ (1,1), (2,2) \}$; $P(C) = 1/2$

$A \cap B = \{ (2,1) \}$; $P(A \cap B) = 1/4 = P(A)\, P(B)$
$A \cap C = \{ (2,2) \}$; $P(A \cap C) = 1/4 = P(A)\, P(C)$
$B \cap C = \{ (1,1) \}$; $P(B \cap C) = 1/4 = P(A)\, P(B)$

Les 3 événements **A, B et C sont 2 à 2 indépendants.**

$A \cap B \cap C = \emptyset$; $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)\, P(B)\, P(C) = 1/8$

Les événements **A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.**