UFR de Sciences économiques et de Gestion

UNIVERSITÉ DE LYON

Support de cours

L3 – S5 : Statistique & Probabilités

Chapitre 3 : Variables aléatoires & Lois de probabilité

Année Universitaire : 2024-2025

R. Abdesselam

UFR de Sciences Economiques et de Gestion

Université Lumière Lyon 2, Campus Berges du Rhône

Rafik.abdesselam@univ-lyon2.fr

http://perso.univ-lyon2.fr/~rabdesse/Documents/

Chapitre 3 : Variables aléatoires

1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

1.1 Introduction

Exemple :

L'expérience aléatoire consiste à lancer 2 pièces de monnaie. On définit l'application X, appelée variable aléatoire réelle et notée v.a.r., qui à tout événement associe le nombre de fois où apparaît le côté pile.

$$\Omega = \{ (p,p) \,;\, (p,f) \,;\, (f,p) \,;\, (f,f) \}$$

L'application X est définie par :

$$X : (\Omega \,,\, @ = \mathcal{P}(\Omega)) \longrightarrow (X(\Omega) = \Omega_X = \{0, 1, 2\} \subset IR$$

$$(p,p) \longrightarrow X((p,p)) = 2$$

X représente une expérience aléatoire dont les résultats sont des nombres réels

Chapitre 3 : Variables aléatoires

1.2 Variable aléatoire réelle

Un espace probabilisé (Ω , @ , P) étant donné,

Définition :

On appelle v.a.r. sur un espace probabilisable (Ω , @) toute application X de Ω dans IR, telle que pour tout événement A de B_{IR}, l'événement $X^{-1}(A)$ est un événement de @.

Notation : l'image réciproque $X^{-1}(A) = \{ w \in \Omega \ / \ X(w) \in @ \}$

Exemple : X v.a.r. associée au nombre de piles obtenu

Préciser les événements

$$\left.\begin{aligned} X^{-1}(0) &= \{ (f,f) \} \\ X^{-1}(1) &= \{ (p,f) ; (f,p) \} \\ X^{-1}(2) &= \{ (p,p) \} \end{aligned}\right\}$$

événements de Ω appartenant à @ $= \mathcal{P}(\Omega)$

$$(\Omega , \mathcal{P}(\Omega)) \xrightarrow{\quad X \quad} (IR , B_{IR})$$

$$\exists\, X^{-1}(A) \in \mathcal{P}(\Omega) \xleftarrow{\quad X^{-1} \quad} \forall A \in B_{IR}$$

Où B_{IR} désigne la tribu de borél : c'est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) qui est contenue par toutes les tribus de la droite réelle IR qui contiennent tous les intervalles du type] $-\infty$, x] , avec x $\in$ IR. Les événements de B_{IIR} sont appelés des boréliens de IR.

Chapitre 3 : Variables aléatoires

Exemple : X v.a.r. continue Ω_X = IR

Préciser les événements

$X^{-1}(\,]a, b]\,) = \{ a < X \leq b \}$

$X^{-1}(\,]-\infty , x]\,) = \{ X \leq x \}$

$X^{-1}(\,\{x\}\,) = \{ X = x \}$

événements de Ω appartenant à la tribu @

Propriétés :

$X^{-1}(\,IR\,) = \Omega$

$X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$X^{-1}(\,A \cup B\,) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)$

$X^{-1}(\,A \cap B\,) = X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)$

Remarque :

Notons que dans la définition d'une v.a.r., la probabilité P figurant dans le triplet (Ω , @ , P) ne joue aucun rôle; seule intervient la tribu @ de Ω . Cependant la variable "aléatoire" X définie sur (Ω , @ , P) permet de probabiliser l'espace d'arrivée (IR , B_{IR}).

Chapitre 3 : Variables aléatoires

1.3 Loi de probabilité d'une v.a.r.

Soit (Ω , @ , P) espace probabilisé.

$$(\Omega = \{ A_1 , A_2 , ..., A_n \} , @) \xrightarrow{\quad X \quad} (\Omega_X = \{ 0 , 1 , 2 \} , \mathcal{B}_{IR})$$

$$A_i \qquad\qquad\qquad X(A_i) = x_i$$

A tout résultat d'épreuve A_i , on associe $x_i = X(A_i)$: la valeur observée de la v.a.r. X pour le résultat A_i.

Si on répète n fois l'épreuve, on obtient une série statistique : $(x_1, x_2,.., x_i ,.., x_n)$.

Exemple : $\Omega = \{(p,p) ; (p,f) ; (f,p) ; (f,f)\}$

$$(\Omega ; @ = \mathcal{P}(\Omega)) \xrightarrow{\quad X \quad} \Omega_X = \{ 0 , 1 , 2 \} \xrightarrow{\quad P \quad} [0 , 1]$$

$\{ (f,f) \}$ — $X(\{(f,f)\}) = 0$ — $P(X = 0) = P[X^{-1}(0)] = P(\{(f,f)\}) = 1/4$

$\{ (p,f) ; (f,p) \}$ — $X(\{(p,f) ; (f,p)\}) = 1$ — $P(X = 1) = P[X^{-1}(1)] = P (\{(p,f) ; (f,p)\}) = 2/4$

$\{ (p,p) \}$ — $X(\{(p,p)\}) = 2$ — $P(X = 2) = P[X^{-1}(2)] = P(\{(p,p)\}) = 1/4$

Chapitre 3 : Variables aléatoires

1.4 FONCTION DE REPARTITION D'UNE V.A.R.

Définition :

Soit la v.a.r $X : (\Omega, @, P) \longrightarrow (IR, B_{IR})$,
On appelle fonction de répartition de la v.a.r. X, la fonction F définie par :

$$F : IR \longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow F(x) = P(X \in]-\infty, x]) = P(X \leq x)$$

La fonction de répartition définit "complètement" la loi de probabilité de X.
Elle satisfait les propriétés suivantes :

Propriétés :

1) $\forall x \in IR, \quad 0 \leq F(x) \leq 1$ *Fonction bornée*

2) F est une fonction croissante de 0 à 1

3) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$= P(X \leq -\infty) = P(\emptyset) = 0$ $\quad$ $= P(X \leq +\infty) = P(\Omega) = 1$

4) $\forall (a, b) \in IR^2, \quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

$\{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} - \{X \leq a\}$ *« différence symétrique »*

$P(\{a < X \leq b\}) = P(\{X \leq b\}) - P(\{X \leq b\} \cap \{X \leq a\})$
$= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

2. Différents types de v.a.r.

On distingue 3 types de variables aléatoires réelles, suivant la nature de Ω_X

Ω_X
- fini : v.a.r. discrète finie
- Infini dénombrable : v.a.r. discrète infinie
- Infini : v.a.r. continue

2.1 Variable aléatoire réelle finie (Ω_X est fini)

C'est une v.a.r. dont la fonction de répartition F est une fonction en escalier avec un nombre fini de valeurs.

Ce qui est équivalent à considérer que X prend un nombre fini de valeurs possibles : x_1 , x_2 ,.., x_n .

La loi de probabilité est alors définie par l'ensemble des probabilités :

$$P(X = x_i) = p_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 \leq p_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}$$

Conditions toujours à vérifier pour qu'une distribution soit une distribution de probabilités

Exemple d'application

L'expérience aléatoire consiste à lancer 2 pièces de monnaie équilibrées. Quelle est la loi de probabilité de la v.a.r. X : « le nombre de côtés "pile" obtenu" ? Etablir sa distribution de probabilité, sa fonction de répartition F et tracer les graphes associés.

$$\Omega = \{ (f,f), (f,p), (p,f), (p,p) \} \xrightarrow{X} \Omega_X = \{ 0 , 1 , 2 \} \xrightarrow{P} [0 , 1]$$

$card(\Omega_X) = 3$ fini ; X : v.a.r. discrète finie.

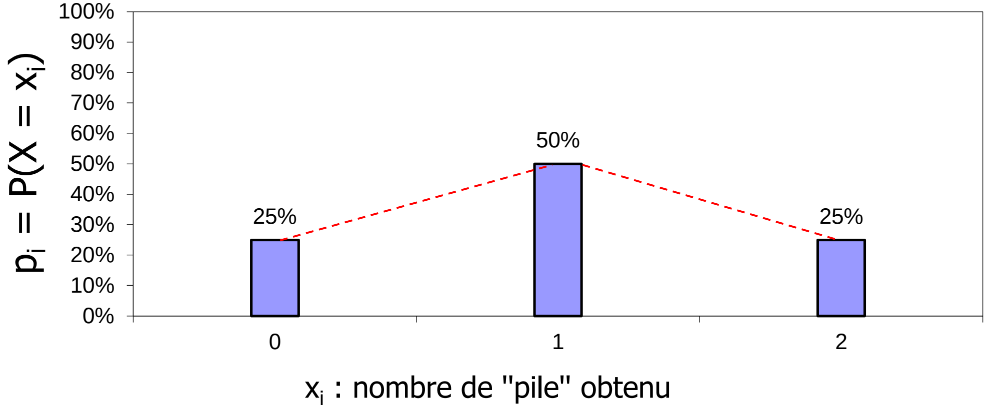
x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\{x_i \leq x\}} p_i$
0	$p_0 = P(X = 0) = 1/4$	$p_0 = 1/4$
1	$p_1 = P(X = 1) = 1/2$	$p_0 + p_1 = 3/4$
2	$p_2 = P(X = 2) = 1/4$	$p_0 + p_1 + p_2 = 1$

$0 \leq F(x) \leq 1$
Fonction bornée

$\forall i=0, 1,2 \quad 0 \leq p_i \leq 1$ et $\Sigma\, p_i = 1$

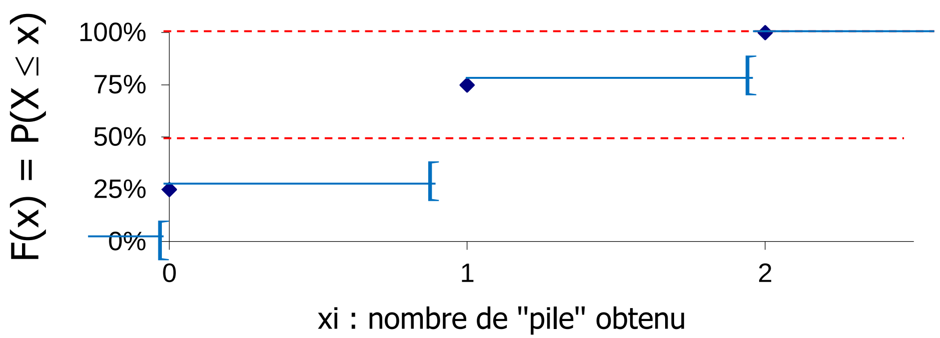
Représentations graphiques

Distribution de probabilité
Diagramme en bâtons



Mode = 1 ;
Valeur la plus probable

Fonction de répartition
Courbe cumulative croissante
Courbe en escalier



x_0 = Médiane = 1 ;
x_0 / $F(x_0)$ = 50%

Chapitre 3 : Variables aléatoires

2.2 Variable aléatoire réelle infinie dénombrable (Ω_X est infini dénombrable)

C'est une v.a.r. dont la distribution de probabilité est un diagramme avec un nombre infini dénombrable de bâtons. La fonction de répartition F est une fonction en escalier avec un nombre infini dénombrable de paliers.

Ce qui est équivalent à dire que $\Omega_X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (\{xi\})$

La loi de probabilité est alors définie par l'ensemble des probabilités :

$$P(X = x_i) = p_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 \leq p_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1 \end{cases} \qquad \underset{n \to +\infty}{Lim} \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Exemple d'application :

Une urne contient 10 boules de couleurs dont 4 boules rouges. On réalise des tirages avec remise jusqu'à l'obtention de la 1ère boule R : rouge. Quelle est la loi de probabilité de la v.a.r. X associée au "nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention de la 1ère boule rouge".

$\Omega_X = \{ 1 , 2, ..., +\infty \} = IN^*$; card(Ω_X) $= +\infty$; X : v.a.r. discrète infinie.

On pose : $p = P(R) = 2/5$ et $q = 1 - p = P(\bar{R}) = 3/5$

La probabilité d'avoir la boule rouge au kème tirage : $P(X = k) = p\, q^{k-1}$ *(loi géométrique)*

(Convergence à l'infini : série géométrique de raison q = 3/5 et de premier terme p = 2/5)

2.3 Variable aléatoire réelle continue (Ω_X est infini)

C'est une v.a.r. dont la fonction de répartition F est continue sur IR et dérivable par morceaux.

La loi de probabilité peut être alors définie par la fonction densité de probabilité f qui est définie par :

$$f(x) = F'(x) \qquad \forall\, x \in \mathrm{IR} \qquad \textit{(f est la function dérivée de F)}$$

On dit alors que X est une v.a.r. à densité de probabilité.

Pour tout événement A = [a ; b] intervalle de IR,

$$P(A) = P([a\,;\,b]) = \int_a^b f(x)\,dx$$

où la fonction f est une *fonction positive ou nulle* *et telle que* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

- La fonction f est toujours au-dessus de l'axe des abscisses et l'aire sous la courbe est égale à 1.
- La fonction f est appelée *densité de probabilité de X.*

UFR de Sciences économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2

Propriétés : $\forall (a , b) \in IR^2$ et $a < b$

- $\boxed{f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in IR}$ ***La courbe est toujours au-dessus de l'axe des abscisses***
- $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$ ***$= P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$***
- $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1}$ ***L'aire sous la courbe est égale à 1.***
- $P(X = x) \approx 0$ ***La probabilité en un point est pratiquement nulle.***

Remarque : La fonction de répartition F de la v.a.r. X est la primitive de la fonction densité f de X.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

Exemples d'application

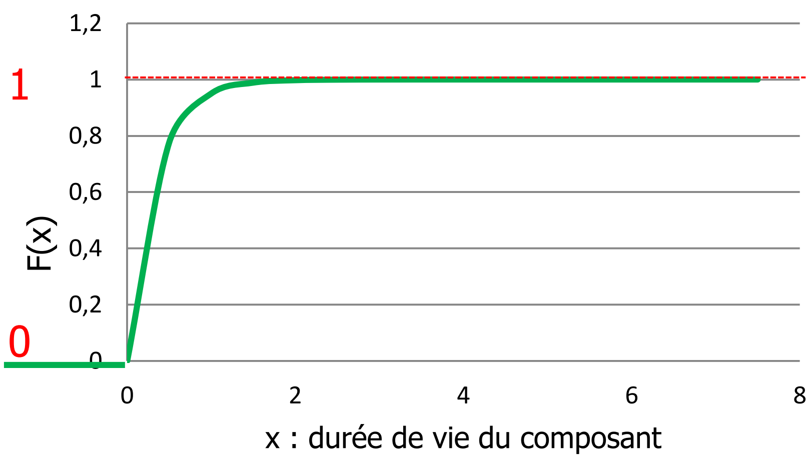
Déterminer puis représenter la fonction densité de probabilité de la v.a.r. X : "durée de vie d'un composant électronique" dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-3x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

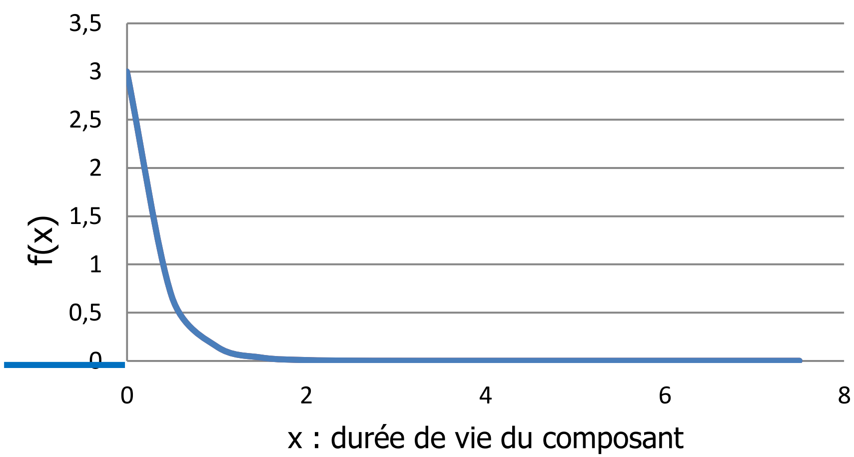
fonction densité de probabilité f :

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 3\,e^{-3x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Fonction de répartition



Fonction densité de probabilité



Chapitre 3 : Variables aléatoires

Remarque - Propriété de la fonction de répartition :

- Si X est une v.a.r. discrète finie ou infinie dénombrable :

$$P(a < X \leq b) = \sum_{\{x_i \,/\, a < x_i \leq b\}} P(X = x_i) = \sum_{\{x_i \,/\, a < x_i \leq b\}} p_i = F(b) - F(a)$$

Exemple d'application :

L'expérience aléatoire consiste à lancer 2 pièces de monnaie équilibrées.
Soit X la v.a.r. associée au « nombre de côtés "pile" obtenu »

x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\{x_i \leq x\}} p_i$
0	1/4	1/4
1	1/2	3/4
2	1/4	1

$P(1 < X \leq 2) = P(X = 2) = 1/4 \quad = F(2) - F(1)$

$P(1 \leq X < 2) = P(X = 1) = 1/2 \quad \neq F(2) - F(1)$

$P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 3/4 \quad \neq F(2) - F(1)$

$P(1 < X < 2) = P(\varnothing) = 0 \quad \neq F(2) - F(1)$

➢ Si X est une v.a.r. continue :

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

En effet, dans le cas d'une v.a.r. continue, la probabilité en un point est pratiquement nulle : $P(X = x) \approx 0$

Exemples d'application

Soit la v.a.r. associée à la "durée de vie d'un composant électronique" dont la loi de probabilité est caractérisée soit par sa fonction de répartition F, soit par sa fonction densité f :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-3x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 3\,e^{-3x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$P(1 < X \leq 2) = P(1 \leq X < 2) = P(1 \leq X \leq 2) = P(1 < X < 2)$$

$$= \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 3\,e^{-3x}\,dx = [- e^{-3x}]_1^2 = (- e^{-6}) - (- e^{-3}) = e^{-3} - e^{-6} = 4.73\%$$

$$= F(2) - F(1) = (1 - e^{-6}) - (1 - e^{-3}) = e^{-3} - e^{-6} = 4.73\%$$

Caractéristiques d'une variable aléatoire

3. Moment d'une variable aléatoire réelle

3.1 Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une v.a.r. est un nombre réel, noté E(X), quand il existe, qui est défini par :

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i \, x_i & \text{v.a.r. discrète finie} \\ \sum_{i=1}^{+\infty} p_i \, x_i & \text{v.a.r. discrète infinie dénombrable} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, dx & \text{v.a.r. continue} \end{cases}$$

Propriétés : Soient X une v.a.r., a et b deux nombres réels non nuls.

- $E(aX + b) = a\,E(X) + b$

Si X est une v.a.r. discète finie :

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(ax_i + b) = a \sum_{i=1}^{n} p_i\,x_i + b \sum_{i=1}^{n} p_i = a\,E(X) + b \times 1 = aE(X) + b$$

L'opérateur " E " d'espérance mathématique est linéaire

Caractéristiques d'une variable aléatoire

Exemples d'application

Calculer l'espérance mathématique de la v.a.r. X

1) discrète et finie caractérisée par sa distribution de probabilité :

x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$F(x) = P(X \leq x)$
0	$p_0 = 1/4$	$p_0 = 1/4$
1	$p_1 = 1/2$	$p_0 + p_1 = 3/4$
2	$p_2 = 1/4$	$p_0 + p_1 + p_2 = 1$

$$\sum_{i=0}^{2} p_i x_i = (1/4)x0 + (1/2)x1 + (1/4)x2 = 3/4 .$$

2) Continue, caractérisée par sa fonction de répartition F :

$$F(x) = \begin{cases} e^x/2 & \text{si } x < 0 \\ (1 + x^2)/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

fonction densité de probabilité f :

$$f(x) = \begin{cases} e^x/2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} (x\, e^x)/2\, dx + \int_{0}^{1} x^2\, dx + \int_{1}^{+\infty} x\, .0\, dx = -1/6$$

"Intégration par parties de $\int_{-\infty}^{0} (x\, e^x)/2\, dx$*"*

Caractéristiques d'une variable aléatoire

Exemples d'application

Soit $f : IR \to IR$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ke^x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de la constante k pour que f soit une densité de probabilité d'une v.a.r. absolument continue X.

Conditions à vérifier :

1) $\forall x \in IR \quad f(x) \geq 0$: si $x < 0$ alors $k e^x \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$;
si $0 \leq x \leq 1$ alors $f(x) = x \geq 0$
si $x > 1$ alors $f(x) = 0 \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} k e^x\, dx + \int_{0}^{1} x\, dx + \int_{1}^{+\infty} 0\, dx$

$$= k\,[e^x]_{-\infty}^{0} + [x^2/2]_0^1 + 0 = k\,(1 - 0) + (1/2)\,(1 - 0) = 1$$

$$= k + 1/2 = 1 \Rightarrow k = 1/2.$$

Fonction densité de probabilité $f : IR \to IR$ $\quad f(x) = \begin{cases} e^x/2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Caractéristiques d'une variable aléatoire

Exemples d'application

Déterminer la fonction de répartition F de la v.a.r. X continue, caractérisée par sa fonction densité de probabilité f : IR → IR

$$f(x) = \begin{cases} e^x/2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Si $x < 0$: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} e^x/2\,dx = (1/2)\,[e^x]_{-\infty}^{x} = (1/2)\,(e^x - 0) = e^x/2$

- Si $0 \leq x \leq 1$: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} (e^x/2)\,dx + \int_{0}^{x} x\,dx = (1/2)\,[e^x]_{-\infty}^{0} + [x^2/2]_0^x$

  $= (1/2)\,(1 - 0) + (1/2)\,(x^2 - 0) = (1/2) + (1/2)\,x^2 = (1 + x^2)/2$

- Si $x > 1$: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^x/2\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{1}^{x} 0\,dx$

  $= (1/2)\,[e^x]_{-\infty}^{0} + [x^2/2]_0^1 + 0 = (1/2)\,(1 - 0) + (1/2)\,(1 - 0) = 1$

Fonction de répartition F : IR → IR

$$F(x) = \begin{cases} e^x/2 & \text{si } x < 0 \\ (1 + x^2)/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3.2 Variance mathématique

La variance mathématique d'une v.a.r. est un nombre réel positif ou nul, notée $V(X)$, quand elle existe, qui est définie par :

$$V(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i \left[(x_i - E(X) \right]^2 & \text{v.a.r. discrète finie} \\ \sum_{i=1}^{+\infty} p_i \left[(x_i - E(X) \right]^2 & \text{v.a.r. discrète infinie dénombrable} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(x - E(X) \right]^2 f(x)\, dx & \text{v.a.r. continue} \end{cases}$$

- L'unité de la variance : carré de l'unité de la variable aléatoire réelle.

Ecart-type

L'écart-type noté $\sigma(X)$, est un indicateur de dispersion. Il est défini comme la racine carrée de la variance.

- C'est un réel positif ou nul noté $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- L'unité de l'écart-type : unité de la variable aléatoire réelle.

Caractéristiques d'une variable aléatoire

3.3 Coefficient de variation :

Le coefficient de variation est un indicateur de dispersion relative, exprimé en valeur absolue et sous forme d'un pourcentage, il s'écrit :

$$CV_{\%} = \left| \frac{\sigma(X)}{E(X)} \right| \times 100$$

- Il est indépendant de l'unité de mesure de la variable aléatoire réelle observée.
- Etant sans unité, il permet de comparer les dispersions relatives entre distributions, quelles que soient leurs unités et les valeurs de la variable.
- Il mesure l'homogénéité de la distribution, plus sa valeur tend vers 0%, plus la distribution est homogène, plus sa valeur tend vers 100%, plus la distribution est hétérogène.
- Dans certains cas, notamment en finance, la volatilité d'un titre est supérieur à son rendement, le coefficient de variation peut être supérieur à 100%.

Caractéristiques d'une variable aléatoire

Propriétés : Soient X une v.a.r. discrète ou continue, a et b deux nombres réels.

- $V(X) = E(\,[\,X - E(X)\,]^2\,) = E(X^2) - E(X)^2$

$V(X) = E(\,[\,X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\,]\,) = E(X^2) - 2\,E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$

$= E(X^2) - E(X)^2$ *Théorème de König-Huygens*

Exemple, X est une v.a.r. continue :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\,(x - E(X)\,]^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2x\,E(X) + E(X)^2)\,f(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx}_{E(X^2)} - 2\,E(X) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx}_{E(X)} + E(X)^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx}_{1}$$

$$= E(X^2) - 2\,E(X)\,E(X) + E(X)^2 \times 1 = E(X^2) - E(X)^2$$

Idem si X est une v.a.r. discrète fini ou infinie dénombrable

- $V(aX + b) = a^2\,V(X)$

$= E[(aX + b)^2] - [E(aX + b)]^2 = E[(a^2 X^2) + 2abX + b^2\,] - [a\,E(X) + b]^2$

$= a^2\,E(X^2) + 2ab\,E(X) + b^2 - a^2\,E(X)^2 - 2ab\,E(X) - b^2$

$= a^2\,E(X^2) - a^2\,E(X)^2$

$= a^2\,[\,E(X^2) - E(X)^2\,]$

$= a^2\,V(X)$

$V(b) = 0$: La variance d'une constante est nulle

Caractéristiques d'une variable aléatoire

Propriétés - Opérations sur les variables aléatoires

Translation de l'origine $X \rightarrow Y = X + b$	Changement d'unité $X \rightarrow Y = a X$	Cas général $X \rightarrow Y = a X + b$
$E(Y) = E(X + b) = E(X) + b$	$E(Y) = E(aX) = a\, E(X)$	$E(Y) = E(aX + b) = a\, E(X) + b$
$V(Y) = V(X + b) = V(X)$	$V(Y) = V(aX) = a^2\, V(X)$	$V(Y) = V(aX + b) = a^2\, V(X)$

3.3 MOMENTS D'ORDRE k

Pour tout entier k ($k \in IN^*$) le nombre réel :

❖ $E(X^k)$ est le moment non centré d'ordre k de la v.a.r. X

k = 1, E(X) : l'espérance mathématique est le moment non centré d'ordre 1 de X.

❖ $E([X - E(X)]^k)$ le moment centré d'ordre k de la v.a.r. X

k = 2, V(X) : la variance mathématique est le moment centré d'ordre 2 de X.

Ils existent si la série ou l'intégrale correspondante existe (convergente).

Caractéristiques d'une variable aléatoire

Exemples d'application

Calculer la variance de la v.a.r. X dans les 2 cas des exemples d'application précédents.

1) discrète finie est caractérisée par sa distribution de probabilité ou sa fonction de répartition :

x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$F(x) = P(X \leq x_i)$
0	$p_0 = 1/4$	$p_0 = 1/4$
1	$p_1 = 1/2$	$p_0 + p_1 = 3/4$
2	$p_2 = 1/4$	$p_0 + p_1 + p_2 = 1$

$E(X) = 3/4$

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{2} p_i\, x_i^2 = (1/4)\mathrm{x}0^2 + (1/2)\mathrm{x}1^2 + (1/4)\mathrm{x}2^2 = 3/2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (3/2) - (3/4)^2 = 15/16.$$

$$CV_{\%} = \sigma(X) / E(X) = \sqrt{15} / 3 = 129.10\%$$

Distribution de probabilité très hétérogène.

2) Continue est caractérisée par sa fonction de répartition F ou sa fonction densité de probabilité f :

$$F(x) = \begin{cases} e^x/2 & \text{si } x < 0 \\ (1 + x^2)/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^x/2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$E(X) = -1/6$; $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} (x^2 e^x)/2\,dx + \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^{+\infty} x^2 .0\,dx = 5/6$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (5/6) - (-1/6)^2 = 11/9$$

3.4 Fonction d'une variable aléatoire réelle

3.4.1 V.A.R. Centrée et réduite

- Si $E(X) = 0$ alors la v.a.r. X est dite centrée.
- Si $\sigma(X) = 1$ alors la v.a.r. X est dite réduite.

- On pose $Y = X - E(X)$, Y est la v.a.r. centrée associée à la v.a.r. X.

En effet, $E(Y) = E\,[(X - E(X)] = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0$

L'espérance mathématique est un opérateur linéaire.

- On pose $U = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$, U est la v.a.r. centrée réduite associée à X ($\sigma(X) \neq 0$) .

En effet, $E(U) = E\,[(X - E(X))/\,\sigma(X)\,] = (E(X) - E(X) / \sigma(X) = 0$

$V(U) = V\,[(X - E(X))/\,\sigma(X)\,] = (1/\,\sigma(X)^2\,)\,V\,[X - E(X)] = (1/\,\sigma(X)^2\,)\,V(X) = 1.$

3.4.2 Exemples de fonctions d'une variable aléatoire réelle

- Cas d'une v.a.r. discrète finie :

Soient X une v.a.r. finie définie sur (Ω , $\mathcal{P}(\Omega)$) et h une fonction définie sur Ω_x. Si Y = h(X) alors Y est une v.a.r. discrète finie définie sur (Ω , $P(\Omega)$) telle que :

$$\forall y \in \Omega_y \quad P(Y = y) = \sum_{\{x_i / h(x_i) = y\}} P(X = x_i)$$

Exemple d'application:

Déterminer la distribution de probabilité de la v.a.r. $Y = X^2 + 1$.
X est une v.a.r. discrète finie dont la distribution de probabilité est définie par :

x_i	$P_i = P(X = x_i)$
-1	1/2
0	1/4
1	1/4

$Y = X^2 + 1$

Les valeurs y_i possibles de Y connaissant les valeurs x_i possibles de X :

$x_i = -1 \Rightarrow y_i = 2$

$x_i = 0 \Rightarrow y_i = 1$

$x_i = 1 \Rightarrow y_i = 2$

y_i	$P_i = P(Y = y_i)$
1	1 / 4
2	3 / 4

$P(Y = 1) = P(X^2 + 1 = 1) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 1/4$

$P(Y = 2) = P(X^2 + 1 = 2) = P(X^2 = 1)$

$= P[(X = 1) \cup (X = -1)] = P(X = 1) + P(X = -1) = 3/4$

3.4.2 Exemples de fonctions d'une variable aléatoire réelle

- Cas d'une v.a.r. continue :

Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F et de fonction densité f. Soit h une fonction continuement dérivable et bijective de fonction inverse h^{-1}.

Si Y = h(X) alors Y est une v.a.r. continue, on peut alors définir sa loi de probabilité à partir de celle de X.

En effet, si on note G la fonction de répartition et g la fonction densité de la v.a.r. Y. On a alors les relations suivantes :

$$G(y) = F(\, h^{-1}(y)\,) \qquad \text{et} \qquad g(y) = \left|\, (\, h^{-1}(y)\,)' \,\right| f(\, h^{-1}(y)\,)$$

- Exemple d'application : Déterminer la loi de probabilité de la v.a.r. $Y = \sqrt{X}$

$$x \xrightarrow{h} h(x) = y = \sqrt{x} \xrightarrow{h^{-1}} h^{-1}(y) = h^{-1}(\sqrt{x}\,) = y^2$$

$$h^{-1} \circ h(x) = x \quad \text{identité}$$

Exemple d'application 1 :

Soit X une v.a.r. continue définie par sa fonction de répartition F :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Déterminer la fonction densité de probabilité g de la v.a.r. $Y = \sqrt{X}$

Ou encore, $Y = 2X + 1$; $Y = X^2$; $Y = |X|$; $Y = \ln X$; e^{-X} ; etc.

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ P(X \leq y^2) & \text{si } y \geq 0\,. \end{cases}$$

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ F(y^2) & \text{si } y \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-y^2} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

g : fonction densité de probabilité de Y (dérivée) :

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 2y\, e^{-y^2} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

Exemple d'application 2 :

Soit X une v.a.r. continue définie par sa fonction de répartition F :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Déterminer la fonction densité de probabilité h de la v.a.r. $Y = e^{-X}$

$$H(y) = P(Y \leq y) = P(e^{-X} \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ P(-X \leq \ln y) = P(X \geq -\ln y) = 1 - F(-\ln y) & \text{si } y \geq 0\,. \end{cases}$$

$$H(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - (1 - e^{\ln y}) & \text{si } -\ln y \geq 0 \\ 1 - 0 & \text{si } -\ln y < 0 \end{cases}$$

Fonction de répartition de Y :

$$H(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

fonction densité de probabilité de Y :

$$h(y) = \begin{cases} 0 & \text{sinon} \\ 1 & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

__Remarque__ : Y suit une loi Uniforme sur l'intervalle [0 , 1] : $Y \longrightarrow U_{[0\,;\,1]}$