UFR de Sciences économiques et de Gestion

UNIVERSITÉ DE LYON

# Support de cours

## L3 – S5 : Statistique & Probabilités

## Chapitre 4 : Lois de probabilités usulles

## Année Universitaire : 2024-2025

*R. Abdesselam*

*UFR de Sciences Economiques et de Gestion*

*Université Lumière Lyon 2, Campus Berges du Rhône*

*Rafik.abdesselam@univ-lyon2.fr*

*http://perso.univ-lyon2.fr/~rabdesse/Documents/*

# *Chapitre 4 : Lois de probabilité usuelles*

## Introduction

La notion de variable aléatoire réelle (discrète finie ou infinie dénombrable ou continue) est liée aux expériences aléatoires.

Ces différentes variables aléatoires réelles fournissent des modèles probabilistes utilisés dans de nombreux domaines variés (économie, sociologie, industrie, biologie, médecine, physique, etc...).

Cela permet d'améliorer la compréhension et l'analyse de phénomènes complexes sans cependant être trop éloigné de la réalité.

Ces lois de probabilité dites usuelles ou courantes se distinguent encore entre lois discrètes finies ou infinies dénombrables à distribution de probabilité et lois continues à densité de probabilité.

La loi de probabilité d'une v.a.r. discrète finie est souvent présentée sous forme d'un tableau.

# Chapitre 4 : Lois de probabilité usuelles

## 4.1 Lois discrètes finies

### 4.1.1 Loi uniforme discrète

On dit qu'une v.a.r. X suit une loi uniforme discrète sur l'ensemble des valeurs de $X_\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ , $card(X_\Omega) = n$ si :

$\forall\, x_i \in X_\Omega$ : $p_i = P(X = x_i) = 1/n$ Equiprobabilité des n résultats de $X_\Omega$

Notation $X \longrightarrow U_{(\{x1, x2, \ldots, xn\})}$

C'est bien une distribution de probabilité dite uniforme sur $X_\Omega$ :

① $0 \leq p_i \leq 1$ et ② $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} 1/n = 1$

Cette loi modélise une expérience aléatoire dont les résultats sont équiprobables.

Exemple : Lancé d'un dé équilibré

Les résultats possibles de l'expérience : $X_\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , $card(X_\Omega) = n = 6$

$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = P(X = 6) = 1/6$

$X \longrightarrow U_{(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})}$

# Chapitre 4 : Lois de probabilité usuelles

## Valeurs caractéristiques :

$$X \longrightarrow U_{(\{1, 2, 3, \ldots, n\})} \qquad \forall\, k \in X_\Omega : \quad p_k = P(X = k) = 1/n$$

$$E(X) = (n + 1)/2 \qquad \text{et} \qquad V(X) = (n^2 - 1)/12$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k\, k = 1/n \sum_{k=1}^{n} k = (1/n)\ n(n+1)/2 = (n + 1)/2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - (n + 1)^2 / 4$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} p_k\, k^2 = 1/n \sum_{k=1}^{n} k^2 = (1/n)\, n(n + 1)(2n + 1)/6 = (n + 1)(2n + 1)/6$$

$$V(X) = (n + 1)(2n + 1)/6 - (n + 1)^2 / 4 = (n + 1)\,[2(2n + 1) - 3(n+1)]/12$$
$$= (n + 1)(n - 1)/12 = (n^2 - 1)/12$$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies

Jacques Bernoulli
(1654 -1705)

## 4.1.2 Loi de Bernoulli

### Définition :

*Une expérience aléatoire est dite "Expérience de Bernoulli" si elle ne* comporte que *2 résultats possibles :*

Succès/Echec ; Oui/Non ; Favorable/Défavorable ; Bonne / Mauvaise ; etc.

### Exemple : Schéma d'urne

Une urne contient des boules rouges en proportion p et des boules non-rouges en proportion q = 1 - p.

On réalise 1 fois l'expérience : prélever une boule au hasard dans l'urne.

Probabilités : $P(R) = p$ et $P(\overline{R}) = q = 1 - p$

On associe à la v.a.r. X : *"la réalisation ou l'apparition d'une boule rouge lors de ce tirage"*

Les valeurs possibles de X : $\begin{cases} X = 1 & \text{si la boule est rouge "succès"} \\ X = 0 & \text{si la boule n'est pas rouge "échec"} \end{cases}$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies

d'ou la distribution de probabilité et la fonction de répartition F de la v.a.r. X

| | k | $P_k = P(X = k)$ | $F(x) = P(X \leq k)$ |
|---|---|---|---|
| Echec | 0 | $1 - p = q$ | q |
| Succès | 1 | p | $q + p = 1$ |

On dit alors que la v.a.r. X suit une loi de Bernouilli de paramètre $p \in ]0 , 1[$, notée B (p) : Notation $X \longrightarrow B(p)$

## Exemple : Schéma d'urne

Loi de la v.a.r. X :

$( \Omega_X = \{0, 1\} , \mathcal{P}(\Omega) ) \xrightarrow{P} [0 , 1]$

$0 \quad P(X = 0) = q$

$1 \quad P(X = 1) = p$

| $x_k$ | $P_k = P(X = x_k)$ | $F(x_k) = P(X \leq x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | $1 - p = q$ | q |
| 1 | p = P(R) | $q + p = 1$ |

## Valeurs caractéristiques :

$E(X) = p$ et $V(X) = pq$

$E(X) = \sum_{k=0}^{1} p_k x_k = q \times 0 + p \times 1 = p$

$V(X) = \sum_{k=0}^{1} p_k [ (x_k - E(X) ]^2 = E(X^2) - E(X)^2$

$E(X^2) = \sum_{k=0}^{1} p_k x_k^2 = p$ et $V(X) = p - p^2 = p(1 - p) = pq$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies

## 4.1.3 Loi Binomiale

### Exemple : Schéma d'urne

*On réalise n fois l'expérience* : prélever une boule au hasard dans l'urne.

*n tirages indépendants (avec remise)*

C'est-à-dire qu'on répète n fois la même expérience de Bernoulli.

Probabilités : $P(R) = p$ et $P(\overline{R}) = q = 1 - p$

Soit la variable aléatoire réelle X associée au *« Nombre de boules Rouges tirées au cours des n tirages »*

Les valeurs possibles de X sont : 0, 1, 2, …, k, …, n

La loi de probabilité de X est définie par :

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k} \qquad \text{pour} \quad k = 0,1,\ldots,n$$

*C'est bien une distribution de probabilité :* $\forall k = 0$ à $n$, $\quad 0 \leq P(X = k) \leq 1 \quad$ et $\quad \sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1.$

*Binôme de Newton :* $(p + q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k \, q^{n-k} = 1 \quad$ avec $\quad p \in [0 , 1] \quad$ et $\quad q = 1 - p.$

X suit une loi Binomiale de paramètres n et p : $X \longrightarrow B(n , p)$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies

## Remarques :

1) La v.a.r. X qui suit une loi B(n, p) est une somme de n v.a.r. $X_i$ de Bernoulli B(p) indépendantes et de même paramètre p.

$$X_i \longrightarrow B(p)$$
$$X_{i=1,n} \text{ indépendantes } \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow B(n, p) .$$

2) B(p) = B(1, p)  n = 1.

3) B(k : n, p) = B(n-k : n , q).

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Si succès : $X \longrightarrow B(n, p)$
Alors échec : $Y \longrightarrow B(n, q = 1 - p)$.
$P(X = k) = P(Y = n - k)$

4) La somme de 2 lois binomiales indépendantes suit une loi binomiale.

$X_1 \longrightarrow B(n_1 , p)$
$X_2 \longrightarrow B(n_2 , p)$
$X_1$ et $X_2$ indépendantes

$$S = X_1 + X_2 \longrightarrow B(n_1 + n_2 , p) .$$

$$P(S = s) = P(X_1 + X_2 = s) = \sum_{k=0}^{s} P[(X_1 = k) \cap (X_2 = s - k)]$$

$$= \sum_{k=0}^{s} P(X_1 = k)\ P(X_2 = s - k)$$

$X_1$ et $X_2$ sont indépendantes en probabilité

$$= \sum_{k=0}^{s} C_{n1}^{k}\ p^k q^{n1-k}\ C_{n2}^{s-k}\ p^{s-k} q^{n_2-(s-k)} = p^s q^{(n_1+n_2-s)} \sum_{k=0}^{s} C_{n_1}^{k}\ C_{n_2}^{s-k}$$

$$= C_{(n1+n2)}^{s}\ p^s q^{(n_1+n_2-s)}$$

avec $\sum_{k=0}^{s} C_{n_1}^{k}\ C_{n_2}^{s-k} = C_{(n1+n2)}^{s}$

# *Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies*

## Valeurs caractéristiques :

$E(X) = np$ et $V(X) = npq$

$X_i \longrightarrow B(p)$ ; $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = pq$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$$

car les $X_i$ sont indépendantes

## Exemple d'application :

D'après un représentant de la compagnie aérienne Lyon'Air, 15% des clients réservent un siège en première classe. Parmi les 10 prochaines réservations,

- Quelle est la loi de probabilité suivie par la v.a.r. X associée au "nombre de clients qui réservent en 1ère classe parmi les 10 prochaines réservations" ?

$X \longrightarrow B(n = 10, p = 0.15)$ ; $P(X = k) = C_{10}^{k}\, p^k\, (1-p)^{10-k}$ $k = 0,1,\ldots,10$

- Quelle est la probabilité qu'aucune personne ne réserve en première classe ?

$$P(X = 0) = C_{10}^{0}\, 0.15^0\, 0.85^{10} = 0.85^{10} = 19.69\%$$

- Quelle la probabilité d'avoir exactement une réservation en première classe ?

$$P(X = 1) = C_{10}^{1}\, 0.15^1\, 0.85^9 = 34.74\%$$

# *Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies*

## Exemple d'application :

D'après un représentant de la compagnie aérienne Lyon'Air, 15% des clients réservent un siège en première classe. Parmi les 10 prochaines réservations,

- quelle est la probabilité d'avoir au plus une réservation en première classe ?

$$P(X \leq 1) = F(1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 54.43\%$$

- quelle est la probabilité d'avoir plus d'une réservation en première classe ?

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 45.57\%$$

- quelle est la probabilité d'avoir un nombre de réservations en première classe compris entre la moyenne plus ou moins un écart-type ?

$$E(X) = np = 1.5 \quad ; \quad V(X) = npq = 1.275 \quad \text{et} \quad \sigma_X = 1.13$$

$$P( E(X) - \sigma_X \leq X \leq E(X) + \sigma_X ] = P( 0.37 \leq X \leq 2.63 )$$
$$= P(X = 1) + P(X = 2) = 62.33\%$$

- quel est le nombre le plus probable de réservations en première classe ?

Mode = 1 : c'est le nombre de réservations en 1ère classe le plus probable parmi les 10 prochaines réservations : $P(X = 1) = 34.74\%$

# *Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies*

## Exemple d'application :

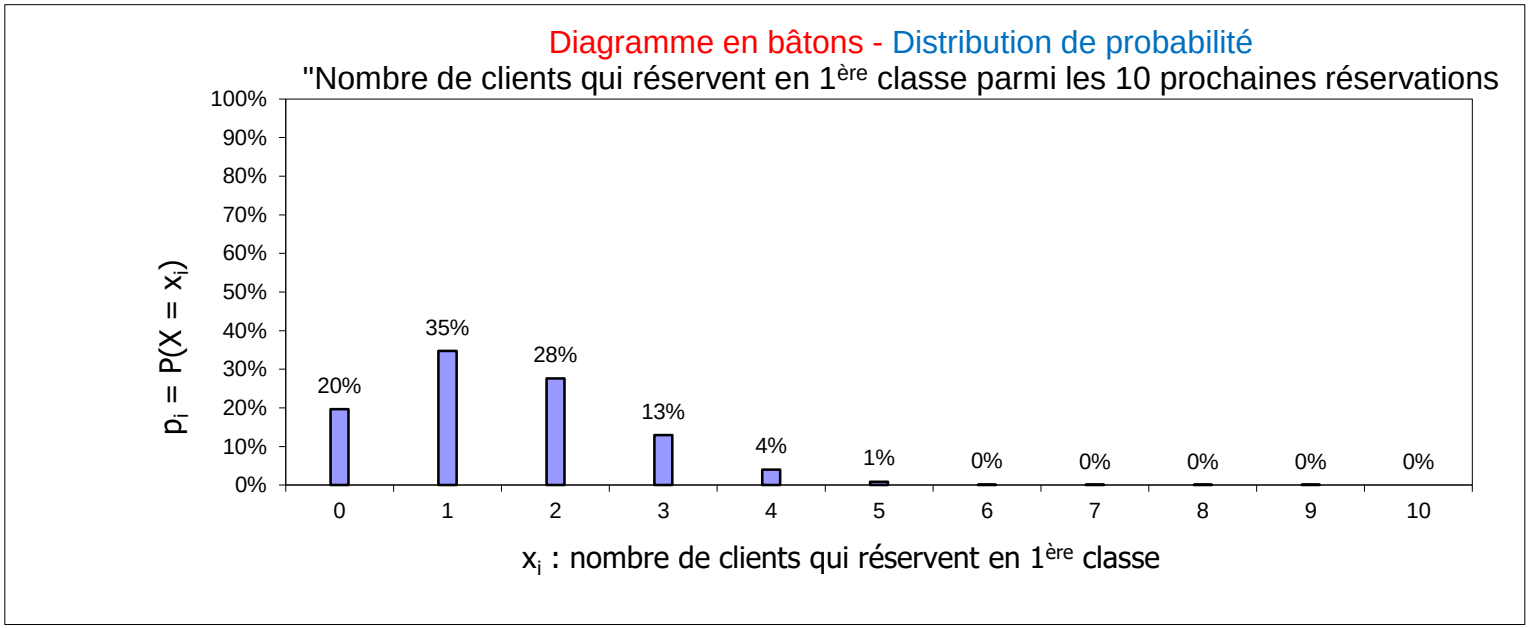
D'après un représentant de la compagnie aérienne Lyon'Air, 15% des clients réservent un siège en première classe. Parmi les 10 prochaines réservations,

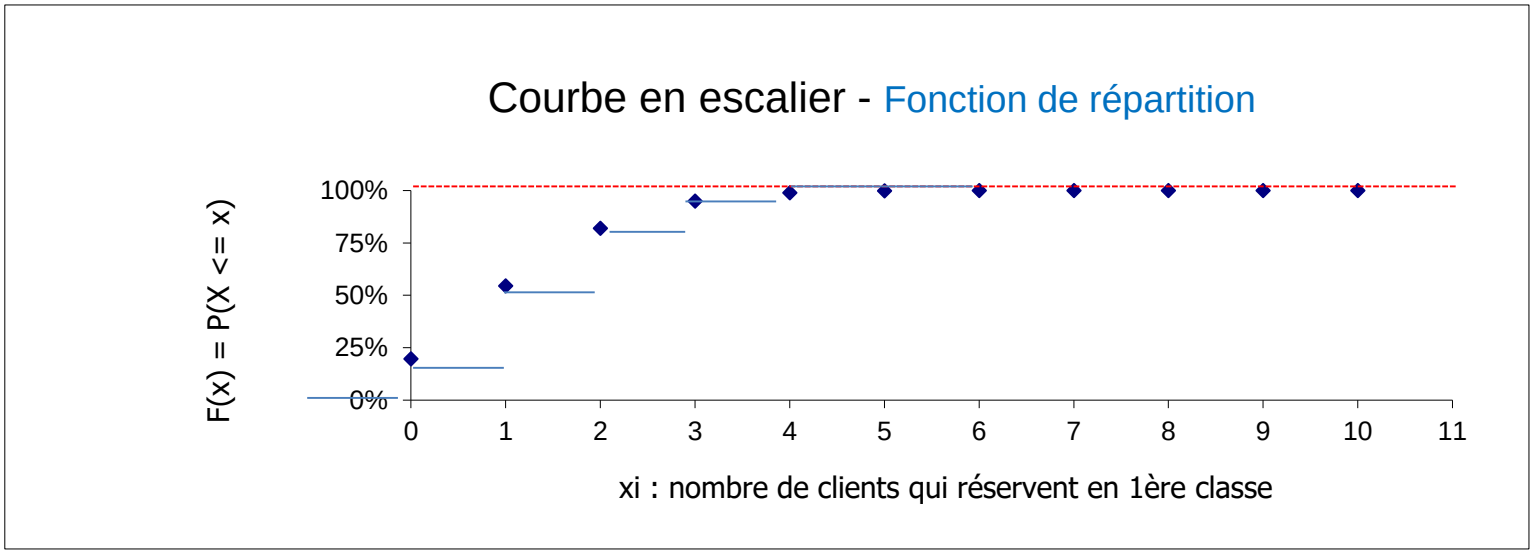
| $x_i$ | $p_i$ | F(x) |
|---|---|---|
| 0 | 0,1968744 | 0,1968744 |
| 1 | 0,34742542 | 0,54429982 |
| 2 | 0,27589666 | 0,82019648 |
| 3 | 0,12983372 | 0,9500302 |
| 4 | 0,04009571 | 0,99012591 |
| 5 | 0,00849086 | 0,99861676 |
| 6 | 0,00124866 | 0,99986542 |
| 7 | 0,00012591 | 0,99999133 |
| 8 | 8,3326E-06 | 0,99999967 |
| 9 | 3,2677E-07 | 0,99999999 |
| 10 | 5,7665E-09 | 1 |

Mode = 1 : P(X = 1) = 34.74%

Médiane = 1 : F(1) = 54.43%

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies



# Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies

## 4.1.4 Loi Hypergéométrique

### Exemple : Schéma d'urne

*Une urne contient a boules rouges et b boules non-rouges. On prélève un échantillon de taille n d'une population de taille N = a + b (n ≤ N).*

*On réalise n fois l'expérience* : n tirages *exhaustifs (dépendants ou sans remise)*

Probabilités : $P(R) = p = a/N$ et $P(\overline{R}) = q = 1 - p = b/N$

Soit la variable aléatoire réelle X associée au *« Nombre de boules rouges tirées au cours des n tirages »*

Les valeurs possibles de X sont :

$$\begin{cases} 0, 1, \ldots, k, \ldots, a & \text{si } n > a \\ 0,1, \ldots, k, \ldots, n & \text{si } n \leq a \end{cases}$$

La loi de probabilité de X est définie par :

$$P(X = k) = C_a^k \, C_b^{n-k} \, / \, C_N^n \quad \text{pour} \quad k = \begin{cases} 0, 1, \ldots, k, \ldots, a & \text{si } n > a \\ 0,1, \ldots, k, \ldots, n & \text{si } n \leq a \end{cases}$$

X suit une loi Hypergéométrique de paramètres N, n et p : $X \longrightarrow H(N, n, p)$
ou encore de paramètres N, n et a = pN : $X \longrightarrow H(N, n, a)$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies

## Valeurs caractéristiques :

$E(X) = np$ *(ne dépend pas de N )*

$X_i \longrightarrow B(p)$ $X_i$ *=1,n dépendantes ;*

$E(X_i) = p$ *et* $V(X_i) = pq$ ; $p = a / N$ ; $q = b / N$ ; $a + b = N$

*On pose* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ; $E(X) = np$ *en effet,*

i = 1 : 1er tirage $E(X_1) = 1 \times P(X_1 = 1) + 0 \times P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = p$

i = 2 : 2ème tirage $E(X_2) = P(X_2 = 1) = p$ ?

$P(X_2 = 1) = P[ ( (X_2=1) \cap (X_1 = 0) ) \cup ( (X_2=1) \cap (X_1 = 1) ) ]$

$= P[ (X_2=1) \cap (X_1 = 0) ] + P[ (X_2=1) \cap (X_1 = 1) ]$

$= P[ (X_2=1) / (X_1 = 0) ] \times P(X_1= 0) + P[ (X_2=1) / (X_1 = 1) ] \times P(X_1 = 1)$

$= [a / (N-1)] \times q + [(a-1)/(N-1)] \times p$

$= a\,b / (N-1)\,N + (a-1)\,a / (N-1)\,N$

$= (a\,b + a^2 – a) / N\,(N-1) = a\,( b + a – 1) / N(N-1)$

$= a\,(N-1) / N\,(N-1) = a / N = p$

i = 3 : 3ème tirage $E(X_3) = P(X_3 = 1) = p$ idem

$\forall i=1, n \quad E(X_1) = E(X_2) = \ldots = E(X_n) = p \quad \Rightarrow \quad E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies

## Valeurs caractéristiques :

$$V(X) = npq\ [(N - n)/(N - 1)]$$

$X_i \longrightarrow B(p)$ $X_i = 1,n$ *dépendantes* ; $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = pq$ ;

*On pose* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ :

Rappel : les variables $X_i$ (i=1 à n) ne sont pas indépendantes :

$$\forall\ i \neq j \quad Cov(X_i , X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)\ E(X_j) \neq 0$$

$$n = 2 : \quad V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\ Cov(X_1 , X_2)$$

Généralisation :

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} Cov(X_i , X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} Cov(X_i , X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} pq + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} [\ E(X_i X_j) - E(X_i)\ E(X_j)\ ]$$

$$= npq + npq\ (\ [(N - n)/(N-1)\ ] - 1)$$

$$= npq\ [(N - n)/(N-1)\ ]$$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies

## Remarques :

1) $\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k} = C_N^n$ avec $N = a + b$

*C'est bien une distribution de probabilité : $\forall k = 0$ à $n$, $0 \leq P(X = k) \leq 1$ et $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$.*

$$\sum_{k=0}^{n} C_a^k \, C_b^{n-k} \, / \, C_N^n = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} C_a^k \, C_b^{n-k} = C_N^n .$$

2) Le facteur de correction ou d'exhaustivité $(N - n)/(N - 1)$ est voisin de 1 lorsque n est petit par rapport à N, c'est-à-dire lorsque le taux de sondage $n/N$ est faible ($< 10\%$).

## Exemple d'application 1 :

Parmi les 30 comptes-clients d'une entreprise, 3 sont inexacts. Le vérificateur prélève au hasard de ce lot 6 comptes pour en vérifier l'exactitude.

- Quel est le taux de sondage ? $t = n / N = 6/30 = 20\%$

- Quelle est en moyenne, le nombre de comptes-clients inexacts dans cet échantillon ?

X : le nombre de comptes-clients inexacts

$X \longrightarrow H\,(N = 30\,,\, n = 6\,,\, p = a/N = 3/30 = 0.1)$ ;

$P(X = k) = C_3^k \; C_{27}^{6-k} \; / \; C_{30}^6 \qquad k = 0,1,\ldots, a=3$

$E(X) = np = 0.6$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies

## Exemple d'application 1 :

Parmi les 30 comptes-clients d'une entreprise, 3 sont inexacts. Le vérificateur prélève au hasard de ce lot 6 comptes pour en vérifier l'exactitude.

X : le nombre de comptes-clients inexacts

$X \longrightarrow H\ (N = 30\ ,\ n = 6\ ,\ p = a/N = 3/30 = 0.1)$ ;

$P(X = k) = C_3^k\ C_{27}^{6-k}\ /\ C_{30}^6 \qquad k = 0,1,\ldots,3$

- Quelle est la variance du nombre de comptes-clients inexacts ?

$V(X) = npq\ (N - n)/(N - 1) = 6 \times 0.1 \times 0.9 \times (24/29) = 0.4469$ ; $(N - n)/(N - 1) = 0.8276$

- Quelle est la probabilité de n'avoir aucun compte-client inexact ?

$P(X = 0) = C_3^0\ C_{27}^6\ /\ C_{30}^6 = 49.85\%$

- Quelle est la probabilité d'avoir plus d'un compte-client inexact ?

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - F(1)$
$= 1 - [C_3^0\ C_{27}^6\ /\ C_{30}^6 + C_3^1\ C_{27}^5\ /\ C_{30}^6\ ] = 9.36\%$

*Remarque : si les tirages étaient indépendants : $X \longrightarrow B\ (n = 6\ ,\ p = 0.1)$*

$P(X = 0) = C_6^0\ 0.10^0\ 0.90^6 = 53,14\ \% \neq 49.85\%$

$P(X > 1) = 1 - (\ C_6^0\ 0.10^0\ 0.90^6 + C_6^1\ 0.10^1\ 0.90^5\ ) = 11.43\% \neq 9.36\%$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies

## Exemple d'application 1 :

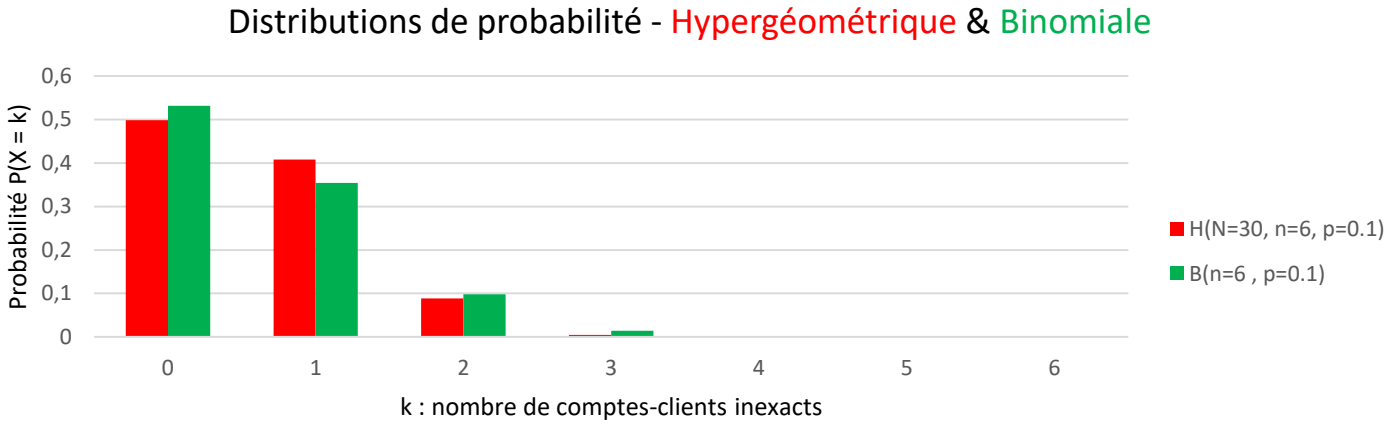
Parmi les 30 comptes-clients d'une entreprise, 3 sont inexacts. Le vérificateur prélève au hasard de ce lot 6 comptes pour en vérifier l'exactitude.

X : le nombre de comptes-clients inexacts

$X \longrightarrow H\ (N = 30\ ,\ n = 6\ ,\ p = a/N = 3/30 = 0.1)$ ;

*Tirages indépendants ou taux de sondage $t = n / N < 10\%$*

*$X \longrightarrow B\ (n = 6\ ,\ p = 0.1)$*



# Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies

## Exemple d'application 2 :

Le responsable de l'entretien d'un immeuble, sans ascenseur, doit remplacer 2 lampes fluorescentes dans un bureau situé au dernier étage. Les lampes sont stockées au sous-sol de l'immeuble dans des boîtes contenant 16 lampes. Il est bien mentionné sur l'emballage que la probabilité qu'une lampe soit défectueuse dans la boîte est de 12,5%.

Comme il veut en finir au plus tôt, le responsable ouvre rapidement une boîte neuve, choisit 2 lampes au hasard et monte les marches jusqu'au dernier étage.

- Caractériser la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle X associée au nombre de lampes défectueuses dans l'échantillon prélevé par le responsable.

X : le nombre de lampes défectueuses dans l'échantillon

$X \longrightarrow H\ (N = 16\ ,\ n = 2\ ,\ p = 0.125)$ ; $p = a/N \Rightarrow a = p\,N = 2$ ; $b = N - a = 14$

$P(X = k) = C_2^k\ C_{14}^{2-k}\ /\ C_{16}^2 \qquad k = 0, 1, 2$

- En déduire l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de la variable aléatoire X.

$E(X) = n\,p = 0.25$ ; $V(X) = npq\,(N - n)/(N - 1) = 2 \times 0.125 \times 0.975 \times (14/15) = 0.2042$

- Quelle est la probabilité que le responsable soit obligé de retourner au sous-sol pour se procurer d'autres lampes ?

$P[(X = 1) \cup (X = 2)] = P(X = 1) + P(X = 2) = C^1_2\ C^1_{14}\ /\ C^2_{16} + C^2_2\ C^0_{14}\ /\ C^2_{16} = 24{,}17\%$

$= 1 - P(X = 0) = 1 - C^0_2\ C^2_{14}\ /\ C^2_{16} = 1 - 91/120 = 24{,}17\%.$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes infinies

## 4.2 Lois discrètes infinies dénombrables

### 4.2.1 Loi Géométrique

La loi géométrique est la loi du nombre d'essais avec remise nécessaire pour faire apparaître pour la 1ère fois un événement de probabilité p.

Exemple : Schéma d'urne

Probabilités : $P(R) = p$ et $P(\overline{R}) = q = 1 - p$

*On réalise des tirages indépendants (avec remise) jusqu'à l'obtention de la 1ère boule Rouge.*

On note X la variable aléatoire réelle associée : « Nombre de boules tirées pour obtenir la 1ère boule Rouge »

Les valeurs possibles de X sont : 1, 2, …, k, …, $+\infty$ ; IN* : infinité de valeurs entières

La loi de probabilité de la v.a.r. X est définie par :

$$P(X = k) = p\,(1 - p)^{k-1} = p\,q^{k-1} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, +\infty$$

*C'est bien une distribution de probabilité : $\forall k \in IN^*$ $0 \le P(X = k) \le 1$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p\,q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} = p \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = p \lim_{n \to +\infty} (1 - q^{n-1})/(1 - q) = p/(1 - q) = 1.$$

*Série géométrique de raison $0 \le q \le 1$ et de premier terme p.*

On dit alors que X suit une loi Géométrique de paramètre p : $X \longrightarrow G(p)$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes finies

## Valeurs caractéristiques :

$E(X) = 1 / p$ et $V(X) = q / p^2$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, p\, q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} k\, q^{k-1}$$

$$u(q) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^k = 1 / (1 - q) \quad \text{— dérivée} \rightarrow \quad u'(q) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, q^{k-1} = 1 / (1 - q)^2$$

*Développement limité au voisinage de l'infini avec* $0 \leq q \leq 1$

$$E(X) = p \sum_{k=1}^{+\infty} k\, q^{k-1} = p / (1 - q)^2 = p / p^2 = 1 / p$$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes infinies

## Valeurs caractéristiques :

$E(X) = 1 / p$ et $V(X) = q / p^2$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X = k) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \, p \, q^{k-1} = p \, q \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \, q^{k-2}$$

$$u'(q) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \, q^{k-1} = 1 / (1-q)^2 \quad \text{— dérivée} \rightarrow \quad u''(q) = \sum_{k=1}^{+\infty} k (k-1) \, q^{k-2} = 2 / (1-q)^3$$

$$u''(q) = \sum_{k=1}^{+\infty} k (k-1) \, q^{k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \, q^{k-2} - \sum_{k=1}^{+\infty} k \, q^{k-2}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \, q^{k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k (k-1) \, q^{k-2} + \sum_{k=1}^{+\infty} k \, q^{k-2}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k (k-1) \, q^{k-2} + (1/q) \sum_{k=1}^{+\infty} k \, q^{k-1}$$

$$= 2/(1-q)^3 + (1/q) \, [1/(1-q)^2] = (1+q) / p^2$$

d'où, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (1+q) / p^2 - (1/p)^2 = q / p^2$

# *Lois de probabilité usuelles – Discrètes infinies*

## Exemple d'application :

Une entreprise fabrique des pièces de précision qui sont utilisées par une usine de montage. D'après le service de contrôle de l'entreprise, la proportion de pièces défectueuses est de l'ordre de 5%.

- Quelle est la probabilité pour que la 4ème pièce contrôlée par le responsable de l'usine s'avère la première défectueuse ?

Soit X : le nombre de pièces contrôlées jusqu'à l'obtention d'une pièce défectueuse

$X \longrightarrow G(p = 5\%)$ ; $P(X = k) = p\, q^{k-1} = 0.05 \times 0.95^{k-1}$ $k = 1, \ldots, +\infty$

$$P(X = 4) = p\, q^3 = 0.05 \times 0.95^3 = 4.29\%$$

- Même question, mais cette fois c'est la 10ème pièce contrôlée ?

$$P(X = 10) = p\, q^9 = 0.05 \times 0.95^9 = 3.15\%$$

- Combien de pièces doit-on contrôler en moyenne avant d'observer une pièce défectueuse ?

$$E(X) = 1 / p = 20 \text{ pièces}$$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes infinies

## 4.2.2 Loi Binomiale négative – Loi de Pascal

La loi de Pascal est la loi du nombre d'essais avec remise nécessaire pour faire apparaître pour la $r^{ème}$ fois un événement de probabilité p.

Exemple : Schéma d'urne

Probabilités : $P(R) = p$ et $P(\bar{R}) = q = 1 - p$

*On réalise des tirages indépendants (avec remise) jusqu'à l'obtention de la $r^{ième}$ boule Rouge.*

On note par X : "Le nombre de boules tirées pour obtenir la $r^{ième}$ boule Rouge"

Les valeurs possibles de X sont : r, r+1, …, $+\infty$ ; IN* : infinité de valeurs entières

La loi de probabilité de la v.a.r. X est définie par :

$$P(X = k) = C_{k-1}^{r-1}\ p^r\ (1 - p)^{k-r} = C_{k-1}^{r-1}\ p^r\ q^{k-r} \qquad \text{pour} \quad k = r, r+1, \ldots, +\infty$$

X suit une loi de Pascal de paramètres r et p : $X \longrightarrow \text{Pascal}(r ; p)$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes infinies

## Remarques :

1) La loi de Pascal de paramètres r et p est la somme de r lois géométriques G(p) indépendantes et de même paramètre p.

$$X_i \longrightarrow G(p)$$
$$X_i = 1,r \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad X = \sum_{i=1}^{r} X_i \longrightarrow \text{Pascal } (r, p) .$$
$$E(X_i) = 1 / p \ ; \ V(X_i) = q / p^2$$

2) G(p) = Pascal (r = 1, p)

## Valeurs caractéristiques :

$$E(X) = r / p \qquad \text{et} \qquad V(X) = r\,q / p^2$$

$$X_i \longrightarrow G(p) \ ; \ E(X_i) = 1 / p \ \text{ et } \ V(X_i) = q / p^2$$

- $E(X) = E(\sum_{i=1}^{r} X_i) = \sum_{i=1}^{r} E(X_i) = \sum_{i=1}^{r} 1 / p = r / p$

- $V(X) = V(\sum_{i=1}^{r} X_i) = \sum_{i=1}^{r} V(X_i)$ car les $X_i$ sont indépendantes : $Cov(X_i , X_j) = 0$

$$= \sum_{i=1}^{r} q / p^2 = r\,q / p^2$$

# *Lois de probabilité usuelles – Discrètes infinies*

## Exemple d'application :

Une entreprise fabrique des pièces de précision qui sont utilisées par une usine de montage. D'après le service de contrôle, la proportion de pièces défectueuses est de l'ordre de 5%.

- Déterminer la probabilité qu'il faille contrôler 10 pièces pour en observer 2 pièces défectueuses.

X : le nombre de pièces à contrôler jusqu'à l'obtention de la 2ème pièce défectueuse

$$X \longrightarrow \text{Pascal}\ (r = 2\ ,\ p = 5\%)$$

$$P(X = k) = C_{k-1}^{r-1}\ p^r\ (1 - p)^{k-r} = C_{k-1}^{1}\ p^2\, q^{k-2} \qquad k = 2,\ldots, +\alpha$$

$$P(X = 10) = C_9^1\ 0.05^2 \times 0.95^8 = 1.48\%$$

- Combien de pièces doit-on contrôler, en moyenne, avant d'observer deux pièces défectueuse ?

$$E(X) = r / p = 40 \text{ pièces}$$

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes infinies

Siméon Denis Poisson (1781-1840).

## 4.2.3 Loi de Poisson

La loi de Poisson est particulièrement utile pour décrire le comportement d'événements dont les chances de réalisation sont faibles, d'où le nom de loi des événements rares. (assurance : sinistres, accidents, files d'attente, etc.)

Exemple : Schéma d'urne

Même schéma d'urne que la loi binomiale avec un grand nombre de boules non-rouges et quelques boules rouges : n " grand" et p = P(R) "petit".

*On réalise des tirages indépendants (avec remise – non exhaustifs).*

On note X la variable aléatoire réelle associée au « nombre de boules rouges tirées »

Les valeurs possibles de X sont : 0, 1, …, $+\infty$ ; IN : infinité de valeurs entières

La loi de probabilité de X est définie par :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k! \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, +\infty$$

X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ ($\lambda > 0$) : $X \longrightarrow P(\lambda)$

# *Lois de probabilité usuelles – Discrètes infinies*

## Remarques

1) C'est bien une distribution de probabilité :

$$\forall k \in IN \quad 0 \leq P(X = k) \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1.$$

- $e^{-\lambda} \lambda^k / k! \geq 0$ car $\lambda > 0$
- $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \lambda^k / k! = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k / k! = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1.$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k / k! = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda^k / k! = e^{\lambda}$$ *Développement limité de $e^{\lambda}$ au voisinage de l'infini.*

2) La distribution de probabilité de Poisson admet :

1 seul Mode = Ent($\lambda$) si $\lambda \notin IN$
2 Mode s = $\lambda - 1$ et $\lambda$ si $\lambda \in IN$

3) La somme de 2 lois de Poisson indépendantes suit une loi de Poisson.

$X_1 \longrightarrow P(\lambda_1)$
$X_2 \longrightarrow P(\lambda_2)$
$X_1$ *et* $X_2$ *indépendantes*

$\Big\}$ $S = X_1 + X_2 \longrightarrow P(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

# Lois de probabilité usuelles – Discrètes infinies

## Valeurs caractéristiques :

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

- $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, e^{-\lambda} \lambda^k / k! = \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{k-1} / (k-1)! = \lambda\, e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = \lambda\, e^{0} = \lambda$

- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\, P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, e^{-\lambda} \lambda^k / (k-1)! = \sum_{k=0}^{+\infty} [(k-1) + 1]\, e^{-\lambda} \lambda^k / (k-1)!$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k-1)\, e^{-\lambda} \lambda^k / (k-1)! + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \lambda^k / (k-1)!$$

$$= \lambda^2\, e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{k-2} / (k-2)! + \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{k-1} / (k-1)!$$

$$= \lambda^2\, e^{-\lambda}\, e^{\lambda} + \lambda\, e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda.$$

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda = E(X).$$

## Exemple d'application 1 :

Le responsable d'une compagnie d'assurances a effectué une compilation du nombre de sinistres qui se sont produits ces dernières années. Ceci a permis d'établir que le taux moyen de sinistres enregistrés par la compagnie a été de 2,5 sinistres par jour. En admettant que le nombre de sinistres en une journée obéit à la loi de Poisson,

$X$ : le nombre de sinistres / jour ; $E(X) = \lambda = 2.5$ sinitres / jour

$X \longrightarrow P(\lambda = 2.5)$ ; $P(X = k) = e^{-2.5}\ 2.5^k / k!$ $k = 0, 1, \ldots, +\infty$

- Quelle est la probabilité que cette compagnie n'enregistre aucun sinistre dans la journée ?

$$P(X = 0) = e^{-2.5}\ 2.5^0 / 0! = e^{-2.5} = 8.21\%$$

- Quelle est la probabilité que cette compagnie enregistre plus de 3 sinistres par jour ?

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3)$$
$$= 1 - [\ P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\ ] = 1 - 0.7576 = 24.24\%$$

- Sur une période d'une année, quel est vraisemblablement le nombre de jours où la compagnie n'a enregistré aucun sinistre ?

1 année = 365 jours ; $365 \times P(X = 0) = 365 \times 8.21\% = 29.96 \approx 30$ jours $\approx 1$ mois

# *Lois de probabilité usuelles – Discrètes infinies*

## Exemple d'application 1 :

- Calculer la probabilité d'avoir un nombre de sinistres compris entre le taux moyen de sinistres plus ou moins un écart-type.

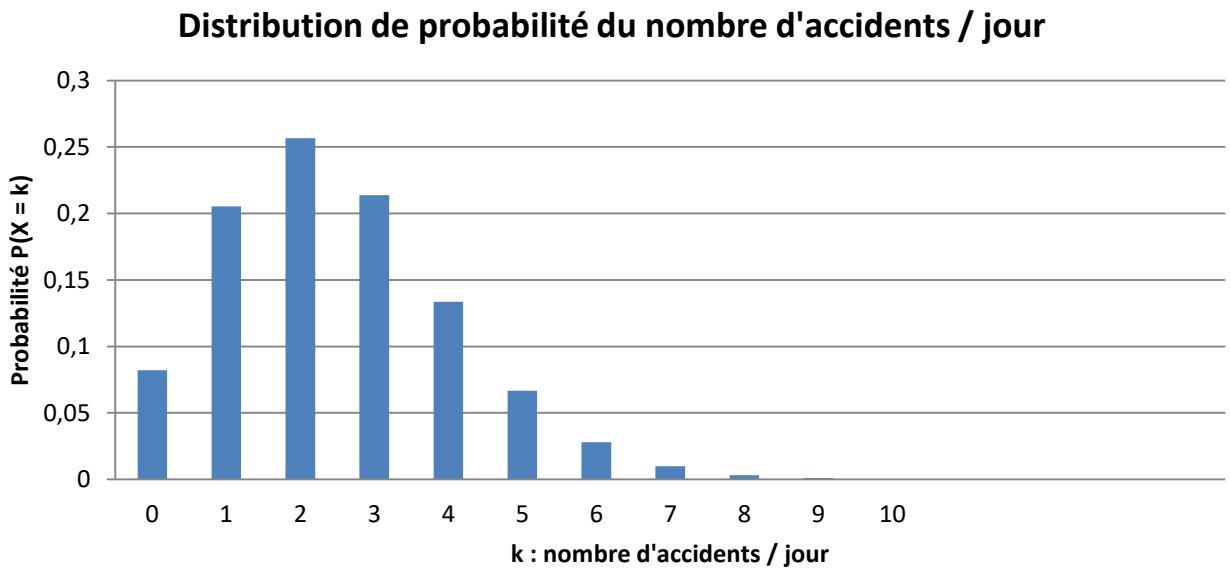
$$E(X) = V(X) = \lambda = 2.5 \quad ; \quad \sigma_X = \sqrt{V(X)} = 1.58$$

$$P[\, E(X) - \sigma_X < X < E(X) + \sigma_X \,] = P[\, 2.5 - 1.58 < X < 2.5 + 1.58 \,] = P(\, 0.92 < X < 4.08 \,)$$
$$= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 80.91\%$$

- Quel est le nombre de sinistres par jour le plus probable et quelle est sa probabilité ?

$$\text{Mode} = 2 \quad ; \quad P(X = 2) = 25.65\%$$

- Représenter graphiquement la distribution de probabilité de X.



# *Lois de probabilité usuelles – Discrètes infinies*

## Exemple d'application 2 :

Deux distributeurs automatiques de billets sont placés l'un à l'extérieur l'autre à l'intérieur de la galerie marchande d'une grande surface. On étudie le nombre aléatoire d'utilisateurs de ces distributeurs pendant une période d'un quart d'heure entre l'ouverture et la fermeture de la grande surface. Un utilisateur sera compté s'il utilise un distributeur dans le quart d'heure considéré.

On suppose que le nombre X d'utilisateurs du distributeur situé à l'extérieur suit une loi de poisson avec un taux moyen de 1 utilisateur par quart d'heure.

X : le nombre d'utilisateurs du distributeur extérieur / période ; $E(X) = \lambda_x = 1$

$$X \longrightarrow P(\lambda_x = 1) \quad ; \quad P(X = k) = e^{-1}\, 1^k / k! \quad k = 0, 1, \ldots, +\infty$$

Quelle est la probabilité de n'avoir aucun utilisateur pendant le quart d'heure considéré devant le distributeur situé à l'extérieur ?

$$P(X = 0) = e^{-1}\, 1^0 / 0! = e^{-1} = 36.79\%$$

On suppose que le nombre Y d'utilisateurs du distributeur situé à l'intérieur suit une loi de poisson, et on a pu établir que la probabilité qu'il y ait 4 utilisateurs en un quart d'heure est le double de la probabilité qu'il y en ait 5 utilisateurs. Montrer que l'espérance mathématique de Y est égale à 2,5.

Y : le nombre d'utilisateurs du distributeur intérieur / période ;

$$Y \longrightarrow P(\lambda_y) \quad ; \quad P(Y = k) = e^{-\lambda y}\, \lambda_y{}^k / k! \quad k = 0, 1, \ldots, +\infty$$

Sachant que $P(Y = 4) = 2\, P(Y = 5) \Rightarrow e^{-\lambda y}\, \lambda_y{}^4 / 4! = 2\, e^{-\lambda y}\, \lambda_y{}^5 / / 5!$

$$\Rightarrow \lambda_y = 5\,! / 2\,!\, 4\,! = 5 / 2 = 2.5$$

# *Lois de probabilité usuelles – Discrètes infinies*

## Exemple d'application 2 :

- Quelle est la probabilité d'avoir un seul utilisateur pendant le quart d'heure considéré devant le distributeur situé à l'intérieur ?

Y : le nombre d'utilisateurs du distributeur intérieur / période ;

$Y \longrightarrow P(\lambda_y = 2.5)$ ; $P(Y = 1) = e^{-2.5}\, 2.5^1 / 1! = 20.52\%$

- Quelle est la probabilité d'avoir plus d'un utilisateur pendant le quart d'heure considéré devant les deux distributeurs ?

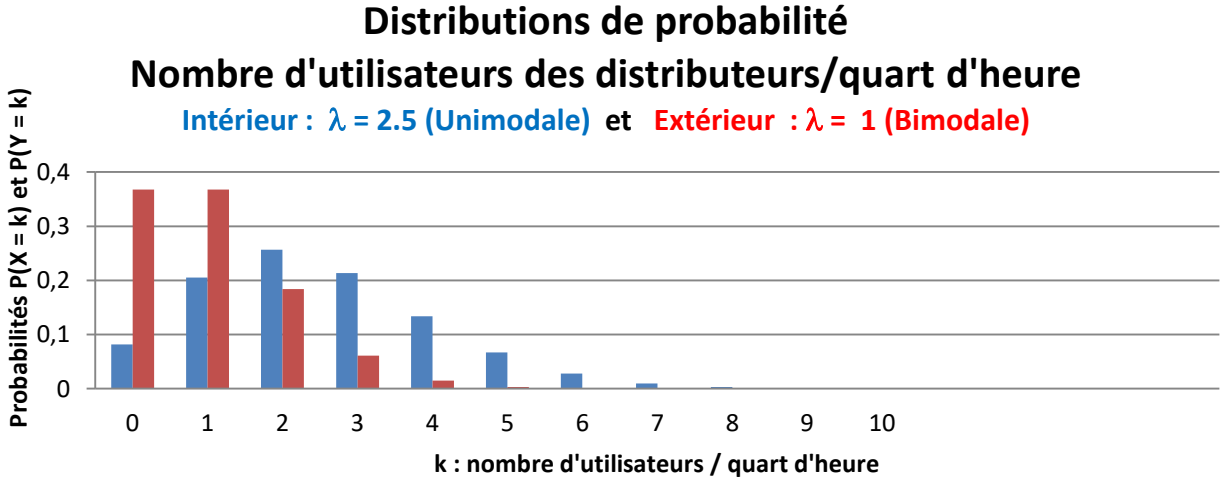
On note S = X + Y, la variable aléatoire réelle associée au nombre d'utilisateurs par quart d'heure des deux distributeurs :

$X \rightarrow P(\lambda_x = 1)$
$Y \rightarrow P(\lambda_y = 2.5)$
X et Y indépendantes

$\Rightarrow$ $S = X + Y \rightarrow P(\lambda_x + \lambda_y = 3.5)$

$P(S = k) = e^{-3.5}\, 3.5^k / k!$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, +\infty$

$P(S > 1) = 1 - P(S \leq 1) = 1 - [\, P(S = 0) + P(S = 1)\, ] = 1 - (\, 0.0302 + 0.1057\, ) = 86.41\%.$



# Lois de probabilité usuelles – Continues

## 4.3 Lois continues à densité de probabilité

### 4.3.1 Loi Uniforme continue

Une variable aléatoire réelle X (absolument continue) suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a , b] \subset IR$ si X a pour fonction densité de probabilité :

Soit $a, b \in IR$ avec $a < b$, $\forall x \in IR$, $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

C'est bien une fonction densité de probabilité : $\forall x \in IR \quad f(x) \ge 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

f est continue sur IR : $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to b^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = 1/(b-a)$.

f est positive sur tout IR : $f(x) = 1/(b-a) \ge 0$ si $a \le x \le b$ ; $f(x) = 0$ ailleurs

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} dx/(b-a) + \int_{b}^{+\infty} 0\,dx = \int_{a}^{b} dx/(b-a) = [x/(b-a)]_a^b = (b-a)/(b-a) = 1.$$

Notation : $X \longrightarrow U[a , b]$ : X suit une loi Uniforme sur l'intervalle $[a , b]$.

# Lois de probabilité usuelles - Continues

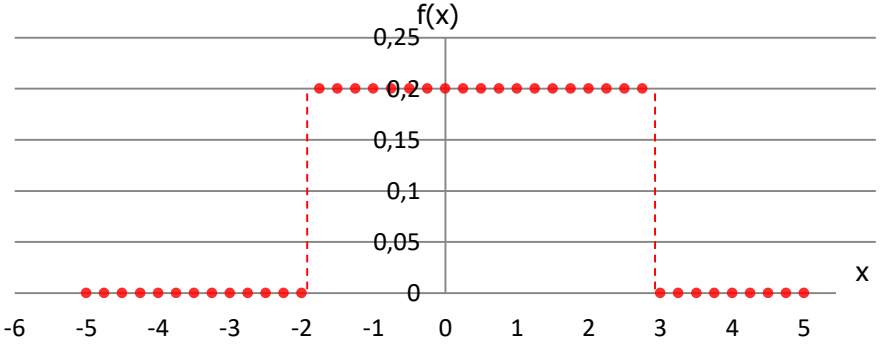
## Fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ (x-a)/(b-a) & \text{si } a \le x \le b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

- Si $x < a$ : $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0.$
- Si $a \le x \le b$ : $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{x} dx/(b-a)$
  $= [x/(b-a)]_a^x = (x-a)/(b-a).$
- Si $x > b$ : $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} dx/(b-a) + \int_{b}^{x} 0\,dx$
  $= [x/(b-a)]_a^b = (b-a)/(b-a) = 1.$

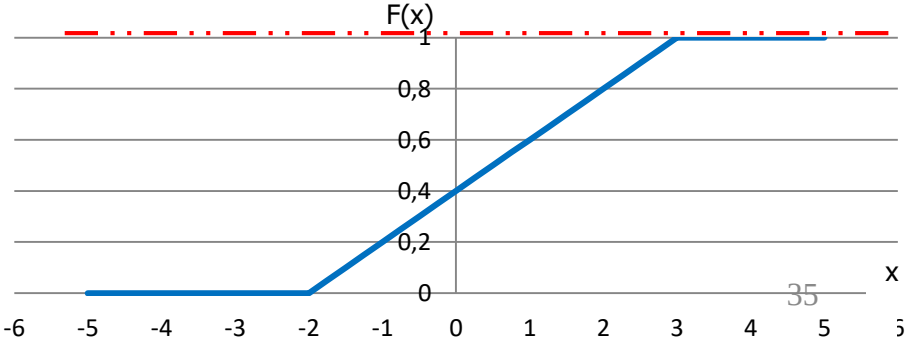
**Densité de probabilité**

**Loi Uniforme sur l'intervalle [-2 , 3]**




**Fonction de répartition**

**Loi Uniforme sur l'intervalle [-2 , 3]**



# *Lois de probabilité usuelles – Continues*

Remarques :

1) Déterminer la **loi de probabilité** d'une v.a.r. continue revient à caractériser soit sa fonction densité de probabilité f, soit par sa fonction de répartition F.

2) La probabilité d'un intervalle quelconque $[\alpha , \beta] \subset [a , b]$ est proportionnelle à sa longueur :

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = [1 / (b - a)] \int_{\alpha}^{\beta} dx = (\beta - \alpha) / (b - a)$$

Valeurs caractéristiques :

$$E(X) = (a + b) / 2 \qquad \text{et} \qquad V(X) = (b - a)^2 / 12$$

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx = [1 / (b - a)] \int_{a}^{b} x\,dx = [1 / (b - a)]\, [x^2 / 2]_a^b = (b^2 - a^2) / 2(b - a)$

  $= (b - a)(b + a) / 2(b - a) = (a + b) / 2.$

- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - (a + b)^2 / 4$

  $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = [1 / (b - a)] \int_{a}^{b} x^2\,dx = [1 / (b - a)]\, [x^3 / 3]_a^b$

  $= (b^3 - a^3) / 3(b - a) = (b - a)(a^2 + ab + b^2) / 3(b - a) = (a^2 + ab + b^2) / 3$

  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (a^2 + ab + b^2) / 3 - (a^2 + 2ab + b^2) / 4$

  $= (a^2 + b^2 - 2ab) / 12 = (a - b)^2 / 12 = (b - a)^2 / 12$

# Lois de probabilité usuelles – Continues

## Exemple d'application :

Soit X une v.a.r. uniforme sur l'intervalle [a , b]. Caractériser puis reconnaître la loi de probabilité de la v.a.r. Y = (X - a)/(b - a) avec b > a.

On note F la fonction de répartition de X et G celle de Y :

$$G(y) = P(Y \le y) = P[\ (X - a)/(b - a)\ \le y\ ] = P[\ X \le (b - a)y + a\ ] = F[\ (b - a)y + a\ ]$$

On sait que $X \to U[a\ ,\ b]$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ (x - a) / (b - a) & \text{si } a \le x \le b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

$$G(y) = F[\ (b - a)y + a\ ] = \begin{cases} 0 & \text{si } (b - a)y + a < a \\ ((b - a)y + a - a) / (b - a) & \text{si } a \le (b - a)y + a \le b \\ 1 & \text{si } (b - a)y + a > b \end{cases}$$

$$G(y) = F[\ (b - a)y + a\ ] = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

*Conclusion : on reconnaît la fonction de répartition d'une loi Uniforme sur [0 , 1] :*

$$Y \to U[0\ ,\ 1] \quad : \quad G(y) = P(Y \le y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ (y - 0) / (1 - 0) & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

# *Lois de probabilité usuelles – Continues*

## 4.3.2 Loi exponentielle

Domaines d'application : Industrie, génie industriel, recherche opérationnelle ( file d'attente, durée de service, durée de vie d'un matériel, durée de chômage, d'hospitalisation, etc.)

Une variable aléatoire réelle X (absolument continue) suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ ($\lambda > 0$), si elle a pour densité de probabilité :

$$\forall x \in IR, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Notation : $X \longrightarrow Exp(\lambda)$ : X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ positif.

Exemple : Durée de vie d'un composant électronique

Analyse de la fiabilité du composant afin de mesurer son aptitude à fonctionner sans défaillance.

$\lambda$ : taux moyen de défaillance du composant

$\beta = 1/\lambda$ : moyenne des Temps de Bon Fonctionnement (temps moyen entre défaillances)

# *Lois de probabilité usuelles - Continues*

## Fonction densité

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

C'est bien une fonction densité de probabilité : $\forall x \in IR \quad f(x) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

f est continue sur IR : $\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$

f est positive sur tout IR : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \geq 0$ si $x \geq 0$ ; $f(x) = 0$ ailleurs

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\,[-e^{-\lambda x} / \lambda\,]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

## Fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si $x < 0$ : $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0.$
- Si $x \geq 0$ : $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda x}\,dx$

$$= \lambda\,[-e^{-\lambda x} / \lambda\,]_0^{x} = -e^{-\lambda x} + 1$$

# Lois de probabilité usuelles – Continues

## Valeurs caractéristiques :

$$E(X) = 1 / \lambda \qquad \text{et} \qquad V(X) = 1 / \lambda^2$$

- $E(X) = \int_{+\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} x\, e^{-\lambda x}\, dx$ ; Intégration par parties : $u = x \rightarrow u' = 1$, $v' = e^{-\lambda x} \leftarrow v = -e^{-\lambda x} / \lambda$

$$= \lambda \left[- x\, e^{-\lambda x} / \lambda\right]_0^{+\infty} - \lambda \int_0^{+\infty} (-e^{-\lambda x} / \lambda)\, dx = \lambda\,(0) + \left[- e^{-\lambda x} / \lambda\right]_0^{+\infty} = 1 / \lambda.$$

- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - 1 / \lambda^2$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}\, dx$ ; Intégration par parties : $u = x^2 \rightarrow u' = 2x$, $v' = e^{-\lambda x} \leftarrow v = -e^{-\lambda x} / \lambda$

$$= \lambda \left[- x^2 e^{-\lambda x} / \lambda\right]_0^{+\infty} - \lambda \int_0^{+\infty} (-2x\, e^{-\lambda x} / \lambda)\, dx = \lambda\,(0) + (2/\lambda) \int_0^{+\infty} \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\, dx = (2/\lambda)\, E(X)$$

$$V(X) = (2/\lambda)\, E(X) - E(X)^2 = (2/\lambda)\,(1/\lambda) - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2.$$

# Lois de probabilité usuelles – Continues

## Exemple d'application 1 :

Un composant électronique a une durée de vie qui est distribuée selon une loi exponentielle dont la durée de vie moyenne est de 500 heures.

- Quelle est alors la valeur du paramètre $\lambda$ ? Que représente ce paramètre dans ce contexte ?

X : la durée de vie d'un composant électronique ; $E(X) = 500 = 1/\lambda \Rightarrow \lambda = 1/500 = 0.002$

$X \longrightarrow Exp(\lambda = 0.002)$ ; $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ ; $f(x) = 0$ sinon

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ ; $F(x) = 0$ sinon

$\lambda = 1/500 = 0.002$ composant / h, il représente le taux moyen de défaillance

- Quelle est la probabilité qu'un composant ait une durée inférieure à 250 heures ?

$$P(X < 250) = F(250) = 1 - e^{-250/500} = 39.35\%$$

- Quelle est la probabilité qu'un composant ait une durée inférieure à la durée de vie moyenne ?

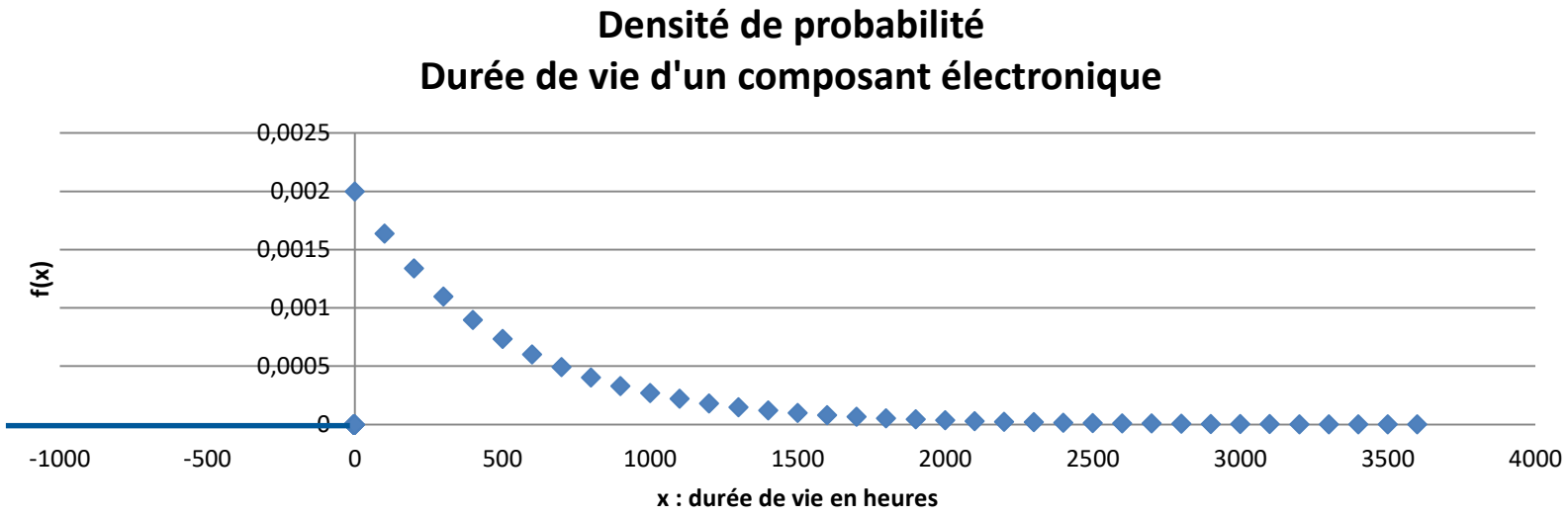
$$P(X < E(X) = 500) = F(500) = 1 - e^{-500/500} = 1 - e^{-1} = 63.21\%$$

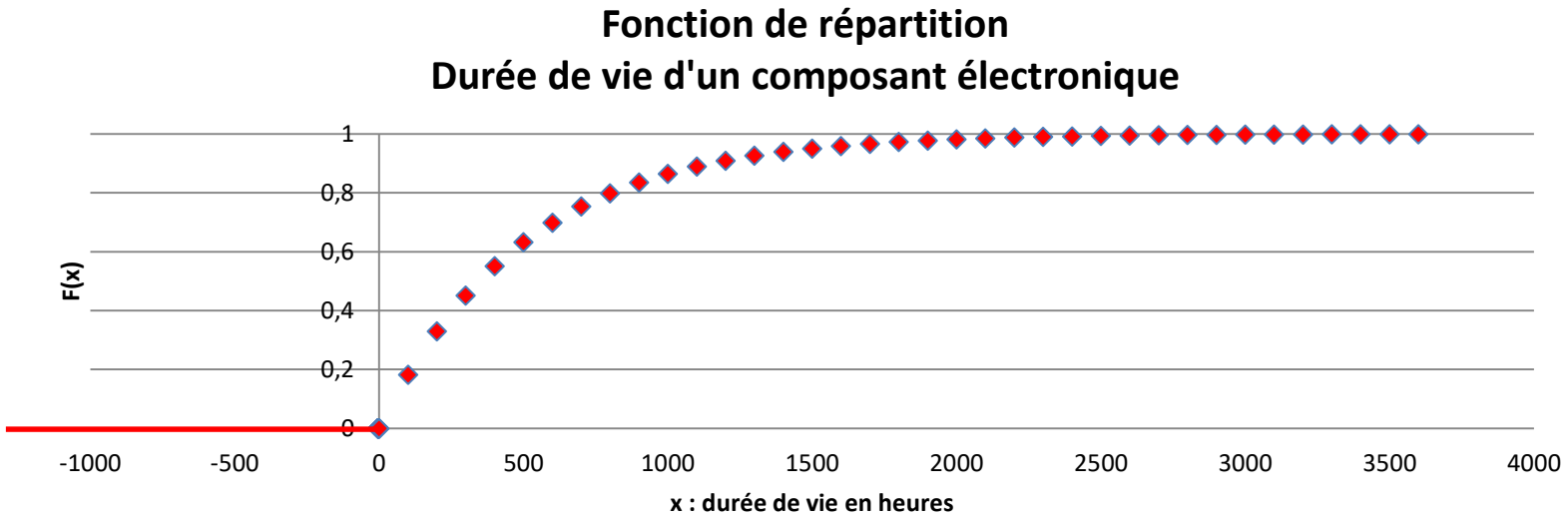
- Sur 1000 composants, combien auront vraisemblablement une durée de vie supérieure à 345 heures ?

$$P(X > 345) = 1 - P(X \leq 345) = 1 - F(345) = e^{-345/500} = 50.16\%$$

Sur 1000 composants fabriqués $\approx$ 502 auront une durée de vie supérieure à 345 h.

# Lois de probabilité usuelles – Continues



# Lois de probabilité usuelles – Continues

## Exemple d'application 1 :

X : la durée de vie d'un composant électronique ; $E(X) = 500 = 1/\lambda \Rightarrow \lambda = 1/500 = 0.002$

$$X \longrightarrow Exp(\lambda = 0.002) \quad ; \quad f(x) = \begin{cases} 0 & si \ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & si \ x \geq 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & si \ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si \ x \geq 0 \end{cases}$$

- Quelle est la probabilité qu'un composant ait une durée vie comprise entre 250 et 500 heures ?

$$P(250 < X < 500) = F(500) - F(250) = 63.21\% - 39.35\% = 23.86\%$$

- Quelle est la probabilité qu'un composant ait une durée de vie inférieure à 500 heures sachant qu'il a duré plus de 250 heures ?

$$P_{(X > 250)}(X < 500) = P[(X < 500)/(X > 250)] = P[(X < 500) \cap (X > 250)] / P(X > 250)$$
$$= P(250 < X < 500) / [1 - P(X \leq 250)]$$
$$= [F(500) - F(250)] / [1 - F(250)] = 0.2386 / 0.6065 = 39.34\%$$

- Déterminer la fonction de répartition G de la v.a.r. $Y = e^{-\lambda X}$. Reconnaître la loi de probabilité de Y.

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(e^{-\lambda X} \leq y) = \begin{cases} 0 & si \ y < 0 \\ P(-\lambda X \leq \ln y) = P(X > -\ln y / \lambda) = 1 - F(-\ln y / \lambda) & si \ y \geq 0 \end{cases}$$

$$G(y) = \begin{cases} 0 & si \ y < 0 \\ y = 1 - (1 - e^{-\lambda(-\ln y / \lambda)}) & si \ -\ln y / \lambda \geq 0 \Rightarrow \ln y \leq 0 \Rightarrow si \ 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & si \ -\ln y / \lambda < 0 \Rightarrow \ln y > 0 \Rightarrow si \ y > 1 \end{cases}$$

# Lois de probabilité usuelles – Continues

## Exemple d'application 1 :

- En déduire la fonction densité de probabilité g de $Y = e^{-\lambda X}$ .

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} 0 & \text{ailleurs} \\ & \\ 1 & \text{si } 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

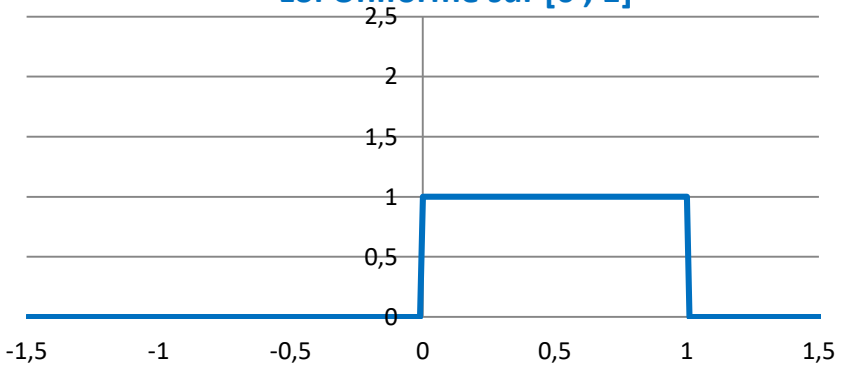
*Conclusion : on reconnaît la fonction de répartition d'une loi Uniforme sur [a= 0 , b=1] :*

$$Y \to U[a=0\,,\ b=1] \quad : \quad G(y) = P(Y \le y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (y-a)/(b-a) & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

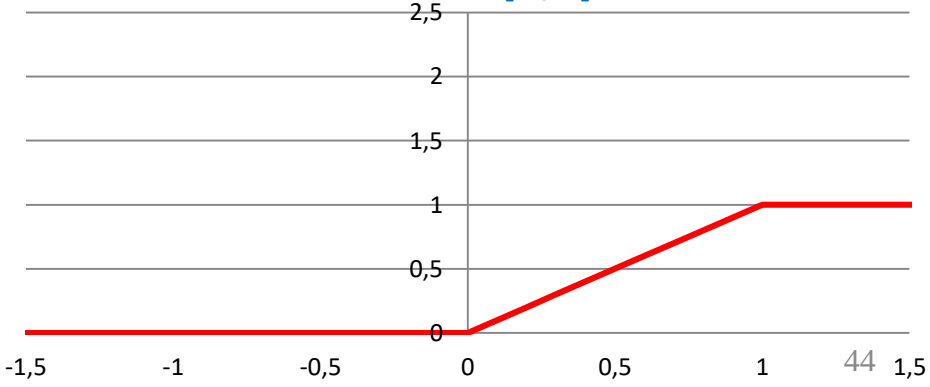
*Ou encore, la fonction densité de probabilité d'une loi Uniforme sur [a=0 , b=1] :*

$$Y \to U[a=0\,,\ b=1] \quad : \quad g(y) = \begin{cases} 0 & \text{ailleurs} \\ 1/(b-a) & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

**Fonction densité de probabilité**
**Loi Uniforme sur [0 , 1]**




**Fonction de répartition**
**Loi Uniforme sur [0 , 1]**



# Lois de probabilité usuelles – Continues

## Exemple d'application 2 :

Dans un magasin de pièces détachées, le temps nécessaire pour servir des clients est distribué selon une loi exponentielle avec une durée moyenne de service de 3 minutes par client. Quelle est alors la valeur du paramètre lambda $\lambda$ ?

X : la durée de service d'un client ; $X \longrightarrow Exp(\lambda = 1/3)$

$E(X) = 1/\lambda \Rightarrow \lambda = 1/E(X) = 1/3 = 0.333$, il représente le taux moyen de service

$$f(x) = \begin{cases} 1/3\, e^{-x/3} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/3} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Quelle est la probabilité que la durée de service soit supérieure à 6 minutes ?

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F(6) = e^{-6/3} = e^{-2} = 13.53\%$$

- Comprise entre 3 et 9 minutes ?

$$P(3 < X < 9) = F(9) - F(3) = (1 - e^{-9/3}) - (1 - e^{-6/3}) = e^{-1} - e^{-3} = 31.81\%$$

- Inférieure à 9 minutes sachant qu'elle est supérieure à 3 minutes ?

$$P_{(X>3)}(X < 9) = P[(X < 9) / (X > 3)] = P[(X < 9) \cap (X > 3)] / P(X > 3)$$
$$= P(3 < X < 9) / P(X > 3) = [F(9) - F(3)] / [1 - P(X \leq 3)]$$
$$= [F(9) - F(3)] / [1 - F(3)] = 1 - (e^{-3} / e^{-1}) = 86.47\%$$

- Est-ce exact de dire qu'il y a 50% de chances pour que la durée de service d'un client soit inférieure à la durée moyenne de service ?

Non, $P(X < E(X) = 3) = F(3) = 1 - e^{-1} = 36.79\%$

# Lois de probabilité usuelles – Continues

## Exemple d'application 3 :

Un fabricant de moniteur-vidéo veut déterminer la période de garantie qu'il devrait associer aux tubes-écran qu'il commercialise. Des essais en laboratoire ont indiqué que la durée de vie utile (en années) de ce composant est distribué selon une loi exponentielle avec un taux moyen de défaillance de 0,20 tube/an.

- Quelle est la durée de vie moyenne des tubes ?

X : la durée de vie (en années) d'un tube-écran ; $X \longrightarrow Exp(\lambda = 0.2)$

$E(X) = 1/\lambda = 5$ ans ; durée de vie moyenne d'un tube

- Quelle est la probabilité qu'un tube opère sans défaillance pour une période excédant sa durée de vie espérée ?

$$P(X > E(X) = 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5) = e^{-0.2 \times 5} = 36.79\%$$

- 50% des tubes fonctionnent sans défaillance pendant combien de temps ?

$x = ?$ / $P(X > x) = 50\% \Rightarrow 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x) = 50\%$

$$\Rightarrow F(x) = 1 - e^{-0.2x} = 0.5 \Rightarrow e^{-0.2x} = 0.5 \Rightarrow \ln e^{-0.2x} = \ln 0.5$$

$$\Rightarrow -0.2x = \ln 0.5 \Rightarrow x = -\ln 0.5 / 0.2 = 3{,}47 \approx 3 \text{ ans et demi.}$$

On veut donner une période de garantie à ces tubes ; toutefois, on ne veut pas remplacer plus de 18% de tubes au cours de cette période de garantie. Quelle devrait être la période de garantie ?

$x = ?$ / $P(X \leq x) \leq 18\% \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-0.2x} \leq 0{,}18 \Rightarrow e^{-0.2x} \geq 0.82 \Rightarrow \ln e^{-0.2x} \geq \ln 0.82$

$$\Rightarrow -0.2x \geq \ln 0.82 \Rightarrow x \leq -\ln 0.82 / 0.2 = 0.9923 \approx 1 \text{ ans.}$$

# Lois de probabilité usuelles – Continues

Pierre-Simon de Laplace (1745-1827)

## 4.3.3 Loi normale (Laplace-Gauss)

La loi normale jouit d'une importance fondamentale puisqu'un grand nombre de méthodes statistiques reposent sur cette loi.

La loi normale est un modèle théorique qui permet d'exprimer d'une manière suffisamment adéquate le comportement aléatoire des observations d'une multitude de phénomènes.

*Notamment lorsque la taille de l'échantillon n est grande - Théorème Central Limite*

Les applications pratiques associées à la loi normale sont également très nombreuses.

La fonction f densité de probabilité d'une v.a.r. X qui suit une loi normale de paramètres m et $\sigma^2$, est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - m}{\sigma} \right)^2 \right] \qquad \forall x \in IR$$

Notation : $X \longrightarrow N(m , \sigma^2)$

Valeurs caractéristiques :

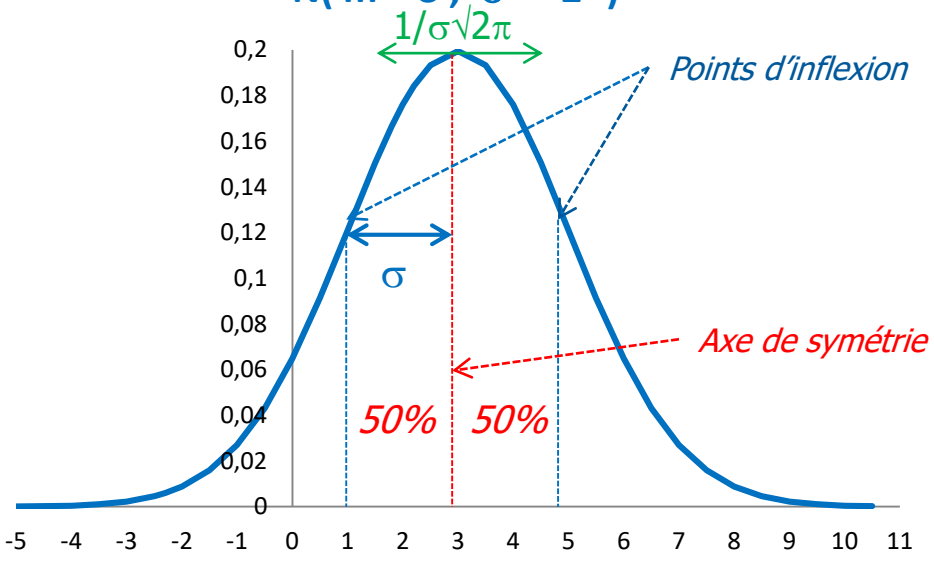
$$E(X) = m \qquad \text{et} \qquad V(X) = \sigma^2$$

# Lois de probabilité usuelles - Continues

*Courbe en cloche*

**f : Fonction densité de probabilité**

**N( m = 3 , $\sigma^2 = 2^2$ )**

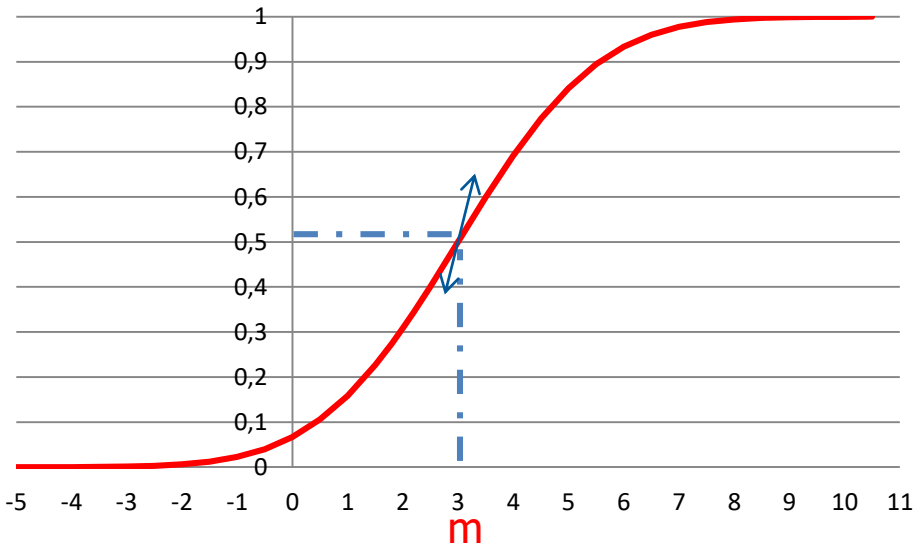



$m - 1\sigma$ $m$ $m + 1\sigma$

m = Mode = Médiane

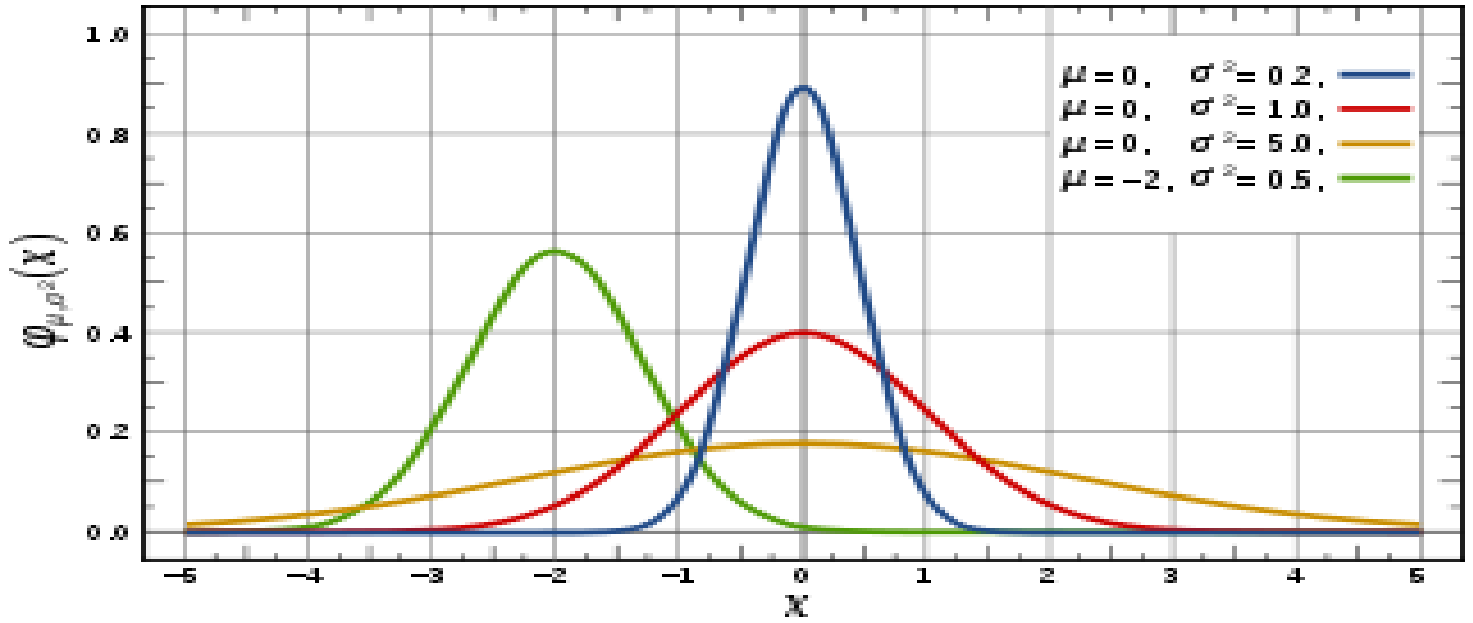
**F : Fonction de répartition**

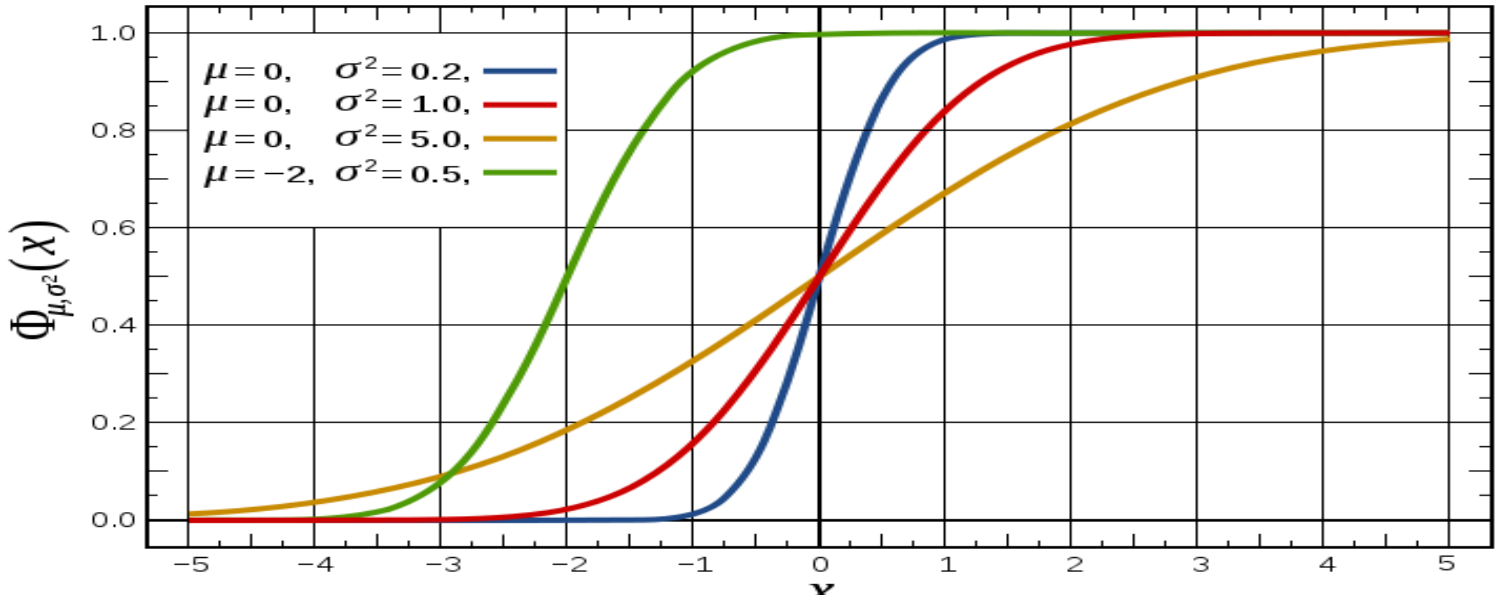
**N( m = 3 , $\sigma^2 = 2^2$ )**




$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

# Lois de probabilité normales



L'expression précédente nous sera toutefois de peu d'utilité, car pour faciliter les calculs (à la main) de probabilités, on utilisera la table de la loi normale centrée réduite (cf. tables statistiques) qui permet d'obtenir aisément des probabilités associées à tout phénomène aléatoire normal.

### 4.3.4 Loi normale Centrée - réduite

Une simple transformation permet de ramener toute distribution normale, quelle que soit la valeur de sa moyenne m ou de son écart-type, à une seule loi normale "standard". Il s'agit alors d'effectuer un changement d'origine et un changement d'échelle.

Si une v.a.r. X suit une loi normale de paramètres m et $\sigma^2$ alors la v.a.r.

$$U = ( X - m ) / \sigma$$

est distribuée selon une loi normale centrée réduite de fonction densité de probabilité :

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \qquad \forall u \in IR$$

Notation : $U \longrightarrow N(0 , 1)$

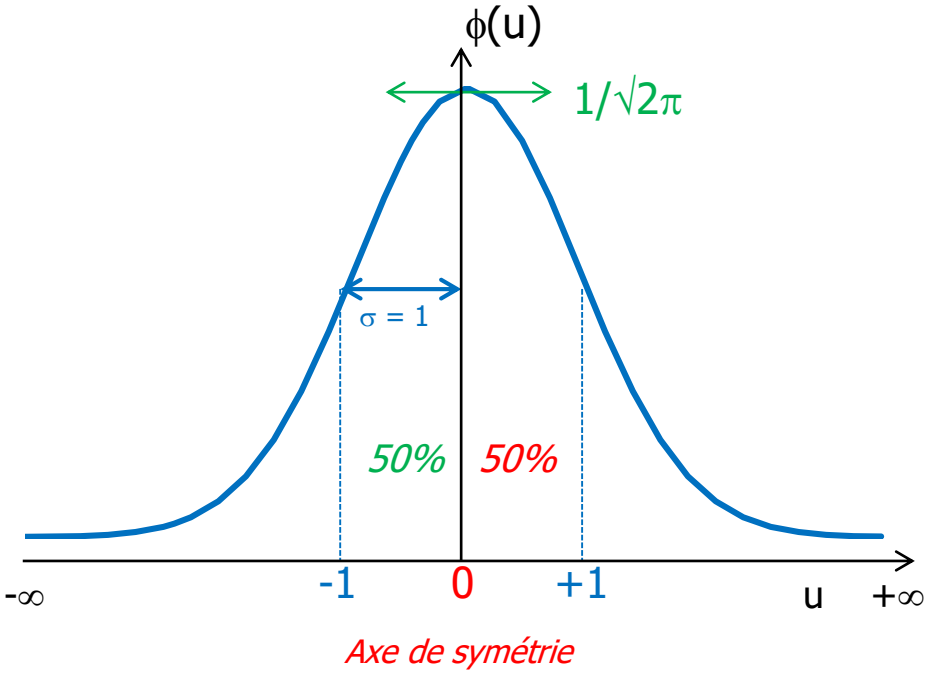
Valeurs caractéristiques :

$$E(U) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(U) = 1$$

# Lois de probabilité usuelles - Continues

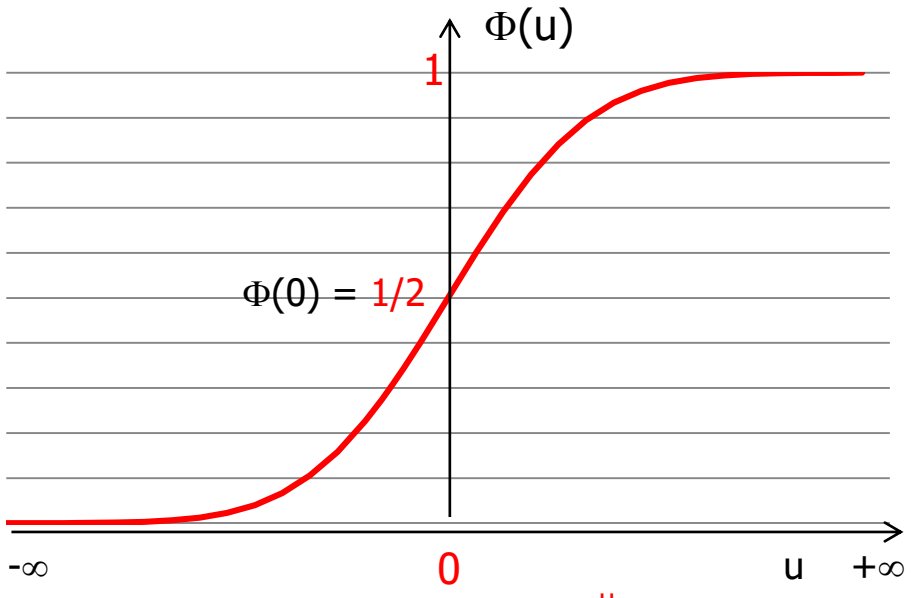
*Courbe en cloche*

**ϕ : Fonction densité de probabilité N(0,1)**




*Axe de symétrie*

**Φ : Fonction de répartition N(0,1)**




$\Phi(u) = P(U \leq u) = \int_{-\infty}^{u} f(u)\, du$

$1/2 = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2}\, du = \int_{-\infty}^{0} \phi(u)\, du = P(U \leq 0) = \Phi(0) = 1/2$

*Propriétés :*

- $\phi$ est symétrique
- points d'inflexion : -1 et +1
- $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)\, du = 1$
- $\Phi(-u) = P(U \leq -u) = 1 - \Phi(u)$
- $\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \phi(u)\, du$ : valeurs tabulées N(0 ; 1)

# Lois de probabilité usuelles - Continues

## Remarque 1 :

Intégrale de Gauss : $U \longrightarrow N(0\ ,\ 1)$

$$\forall u \in IR,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)\,du = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du = 1 \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{2\pi}}$$ *Intégrale de Gauss*

Si on pose $t = u / \sqrt{2}$

$dt = du / \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = (1/2)\sqrt{\pi}}$ (parité)

$t^2 = u^2 / 2$

## Remarque 2 :

$U \longrightarrow N(0\ ,\ 1)$ ; $E(U) = 0$ ; $V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = E(U^2) = 1$

$$V(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,\phi(u)\,du = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,e^{-u^2/2}\,du = 1 \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{2\pi}}$$

## Propriété :

La Somme (Différence) de 2 lois normales indépendantes suit une loi normale.

$X_1 \longrightarrow N(m_1\ ,\ \sigma_1^2)$
$X_2 \longrightarrow N(m_2\ ,\ \sigma_2^2)$
$X_1$ et $X_2$ *indépendantes*

$S = X_1 + X_2 \longrightarrow N(m_1 + m_2\ ,\ (\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})^2)$.
$D = X_1 - X_2 \longrightarrow N(m_1 - m_2\ ,\ (\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})^2)$.

$E(S) = m_1 + m_2$ $\quad V(S) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$
$E(D) = m_1 - m_2$ $\quad V(D) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$

# Lois de probabilité usuelles – Continues

## Exemple d'application 1 : *Usage de la table N(0 , 1)*

Soit X une v.a.r. qui suit une loi normale N( m = 5 , $\sigma^2 = 4^2$ ).

a) Calculer les probabilités suivantes : $P(X \leq 10)$ , $P(X < 2)$ et $P(2 < X \leq 10)$.

$P(X \leq 10) = P[\ U \leq (10 - 5)/4\ ] = P(U \leq 5/4) = P(U \leq 1.25) = \Phi(1.25) = 89.44\%$

$P(X < 2) = P[\ U \leq (2 - 5)/4\ ] = P(U \leq -3/4) = P(U \leq -0.75)$

$= \Phi(-0.75) = 1 - \Phi(0.75) = 22.66\%$ $\Phi(0.75) = 0.7734$ cf table N(0,1)

$P(2 < X \leq 10) = P[\ (2 - 5)/4 < U \leq (10 - 5)/4\ ] = P(-3/4 < U \leq 5/4)$

$= P(-0.75 < U \leq 1.25) = \Phi(1.25) - \Phi(-0.75) = \Phi(1.25) - (1 - \Phi(0.75))$

$= \Phi(1.25) + \Phi(0.75) - 1 = 0.8944 + 0.7734 - 1 = 66.78\%$

b) Déterminer x de telle sorte que F(x) = 0,77 , F(x) = 0,39

$F(x) = P(X \leq x) = 0.77 \Rightarrow P[\ U \leq (x - 5)/4\ ] = \Phi[\ u = (x - 5)/4\ ] = 0.77$

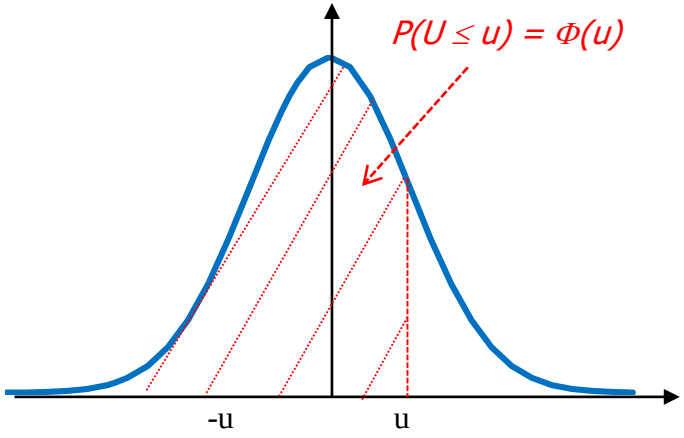
$\Rightarrow u = (x - 5)/4 = 0.735$ cf. table N(0,1) $\Rightarrow x = 7.94$

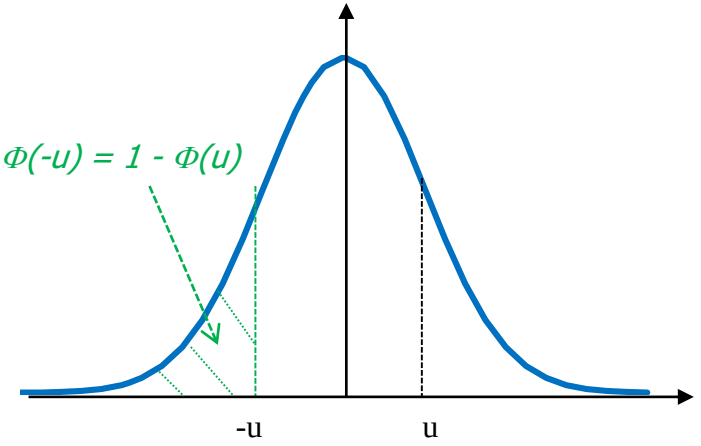
$F(x) = P(X \leq x) = 0.39 \Rightarrow P[\ U \leq (x - 5)/4\ ] = \Phi[\ u = (x - 5)/4\ ] = 0.39$

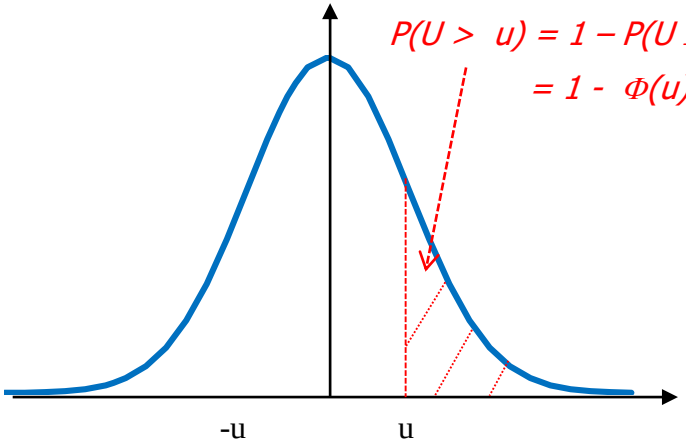
$\Rightarrow \Phi[\ -u = -(x - 5)/4\ ] = 0.61$ vu que $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$

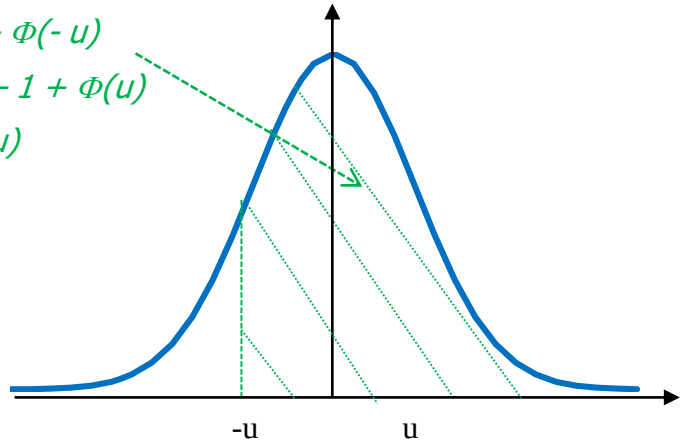
$\Rightarrow -(x - 5)/4 = 0.275$ cf. table N(0,1) $\Rightarrow x = 5 - 4x0.275 = 3.9$

# Lois de probabilité usuelles - Continues



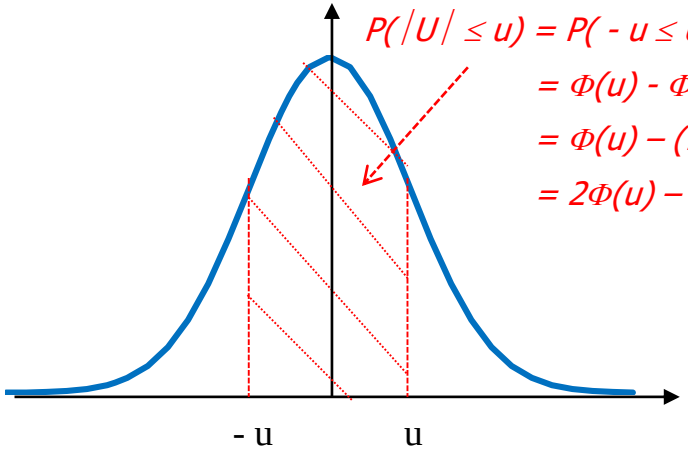



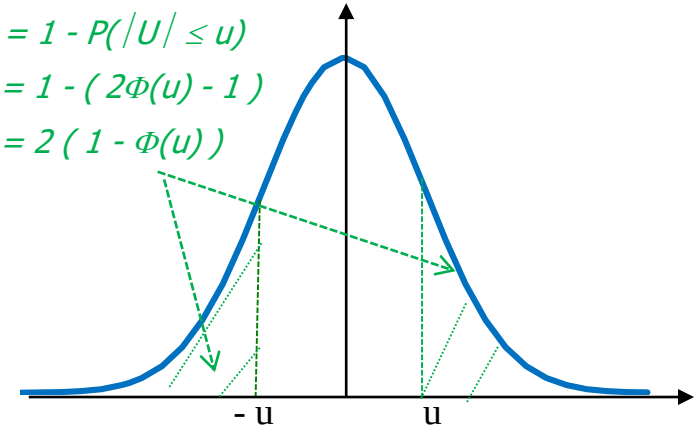



# Lois de probabilité usuelles - Continues

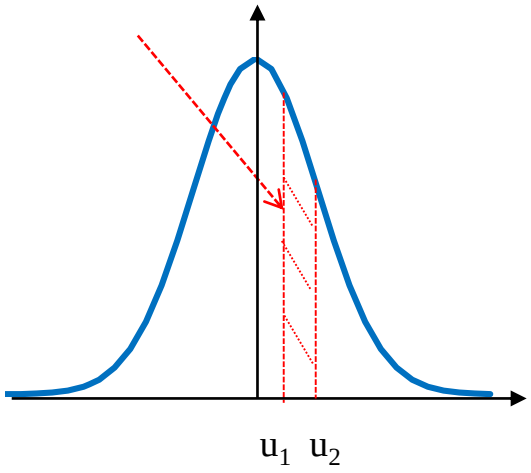
$P(|U| \le u) = P(-u \le U \le u)$
$= \Phi(u) - \Phi(-u)$
$= \Phi(u) - (1 - \Phi(u))$
$= 2\Phi(u) - 1$



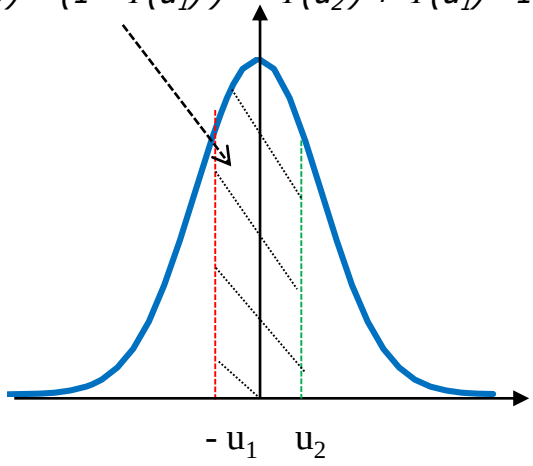

$P(|U| > u) = 1 - P(|U| \le u)$
$= 1 - (2\Phi(u) - 1)$
$= 2(1 - \Phi(u))$



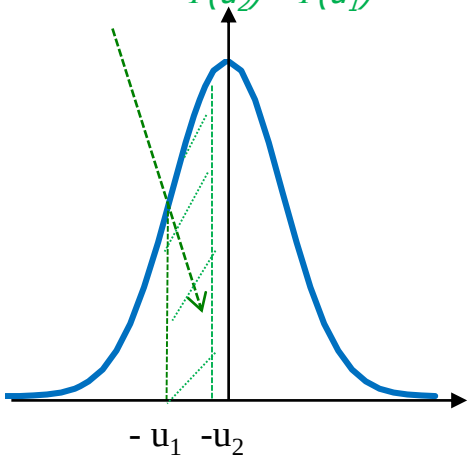

$P(u_1 \le U \le u_2) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$




$P(-u_1 \le U \le u_2) = \Phi(u_2) - \Phi(-u_1)$
$= \Phi(u_2) - (1 - \Phi(u_1)) = \Phi(u_2) + \Phi(u_1) - 1$




$P(-u_1 \le U \le -u_2) = \Phi(-u_2) - \Phi(-u_1)$
$= 1 - \Phi(u_2) - (1 - \Phi(u_1))$
$= \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$

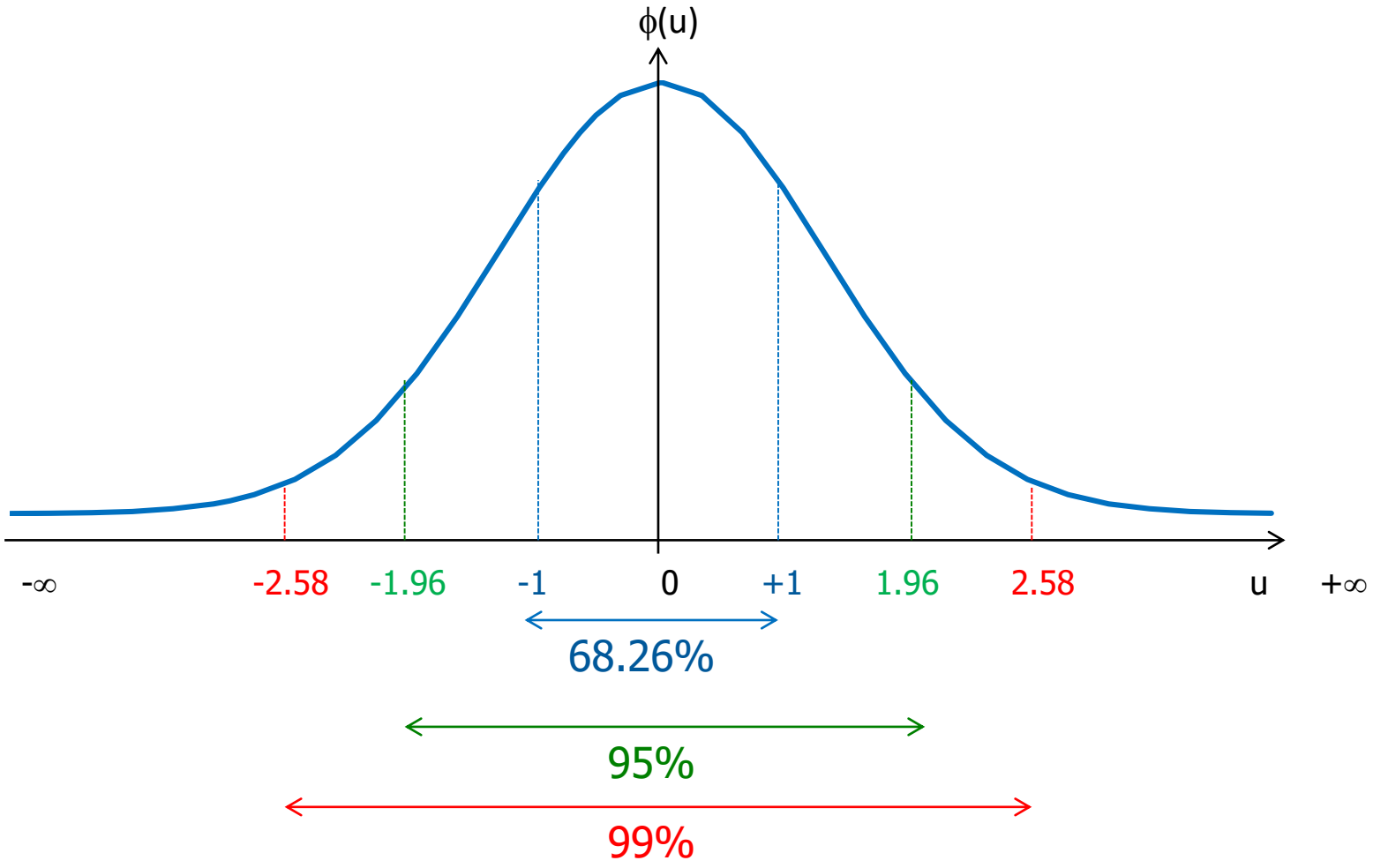


# Lois de probabilité usuelles – Continues

## Exemple d'application 2 : *Fractiles caractéristiques de la table N(0 , 1)*

Soit X → N(m , $\sigma^2$), déterminer la probabilité des intervalles suivants :

[m - 1$\sigma$ ; m + 1$\sigma$] ; [m - 1,96 $\sigma$ ; m + 1,96 $\sigma$] ; [m - 2,58 $\sigma$ ; m + 2,58 $\sigma$].



# Lois de probabilité usuelles – Continues

## Exemple d'application 3 :

Le service comptable d'une compagnie d'assurances a évalué le montant de la cotisation annuelle d'un contrat d'assurance complémentaire proposé depuis plusieurs années, et en a établi que cette cotisation est normalement distribuée avec une moyenne m = 500€ et un écart-type = 50€.

On notera par X : *"Le montant de la cotisation annuelle des assurés"*

$$X \rightarrow N(\ m = 500\ ;\ \sigma^2 = 50^2)$$

a) Déterminer puis interpréter la valeur du coefficient de variation du montant de la cotisation annuelle des assurés

$$CV(\%) = \sigma / m = 50 / 500 = 10\%$$ distribution homogène

b) Quelle est la probabilité qu'un contrat d'assurance, choisi au hasard, ait une cotisation annuelle inférieure à 440€ ?

$$P(X < 440) = P[\ U < (440 - 500)/50\ ] = P(U < -60/50) = P(U < -1.2) = \Phi(-1.2)$$

$$= 1 - \Phi(1.2) = 11.51\%$$ $\Phi(1.2) = 0.8849$ cf table N(0,1)

c) Quelle est la probabilité qu'un contrat d'assurance, choisi au hasard, ait une cotisation annuelle supérieure à 560€ ?

$$P(X > 560) = 1 - P(X \leq 560) = 1 - P[\ U \leq (560 - 500)/50\ ] = 1 - P(U \leq 60/50)$$

$$= 1 - P(U \leq 1.2) = 1 - \Phi(1.2) = 1 - 0.8849 = 11.51\%$$

# Lois de probabilité usuelles – Continues

X : "*Le montant de la cotisation annuelle des assurés*" → N( m = 500 ; $\sigma^2 = 50^2$)

d) Entre quelles valeurs autour de la moyenne se situe la cotisation des 95% des assurés ? entre $m - 1.96\sigma$ et $m + 1.96\sigma$ c'est-à-dire [402€ ; 598€]

$P( 402 \leq X \leq 598) = P[- 1.96 \leq U \leq 1.96] = 2\,\Phi(1.96) - 1 = 95\%$ $\Phi(1.96) = 0.9750$

e) Sur les 3600 assurés de cette compagnie, combien auront une cotisation annuelle comprise entre 440€ et 560€ ?

$P(440 < X < 560) = P[ -1.2 < U < 1.2 ] = \Phi(1.2) - \Phi(-1.2) = 2\,\Phi(1.2) - 1 = 76.98\%$

$3600 \times 0.7698 = 2771.28 \approx 2772$ assurés

f) 25% des contrats de cette compagnie, ont une cotisation annuelle inférieure ou égale à quelle valeur ?

$x = ?$ / $P(X < x) = 0.25 \Rightarrow P(U < (x - 500)/50 ) = \Phi [ u = (x - 500)/50 ) ] = 0.25$

$\Rightarrow u = - 0.6745$ c.f. table N(0,1) ; $u = (x - 500)/50 = - 0.6745 \Rightarrow x = 466.27$€

g) Les 10% des contrats ayant des cotisations les plus élevées, ont une cotisation supérieure à quelle valeur ?

$x = ?$ / $P(X > x) = 0.10 \Rightarrow P(X \leq x) = 0.90 \Rightarrow P(U < (x - 500)/50 ) = 0.90$

$\Rightarrow u = 1.2816$ c.f. table N(0,1) ; $u = (x - 500)/50 = 1.2816 \Rightarrow x = 564.08$€

h) En supposant que l'écart-type reste inchangé, à quel montant moyen doit être fixée la cotisation de sorte que seulement 5% des assurés auront une cotisation annuelle supérieure à 564,08€ ?

$m^* = ?$ / $P(X > 564.08) = 0.05 \Rightarrow P(U \leq (564.08 - m^*)/50 ) = 0.95$

$\Rightarrow u = 1.645$ c.f. table N(0,1) ; $u = (564.08 - m^*)/50 = 1.645 \Rightarrow m^* = 481.83$€

# Lois de probabilité usuelles – Continues

## 4.3.4 Loi Log-normale

Une variable aléatoire réelle notée Y suit une loi Log-normale de paramètres $m_x$ et $\sigma_x^2$ si la variable aléatoire réelle de son logarithme notée X = LnY suit une loi normale de paramètres $m_x$ et $\sigma_x^2$ et réciproquement.

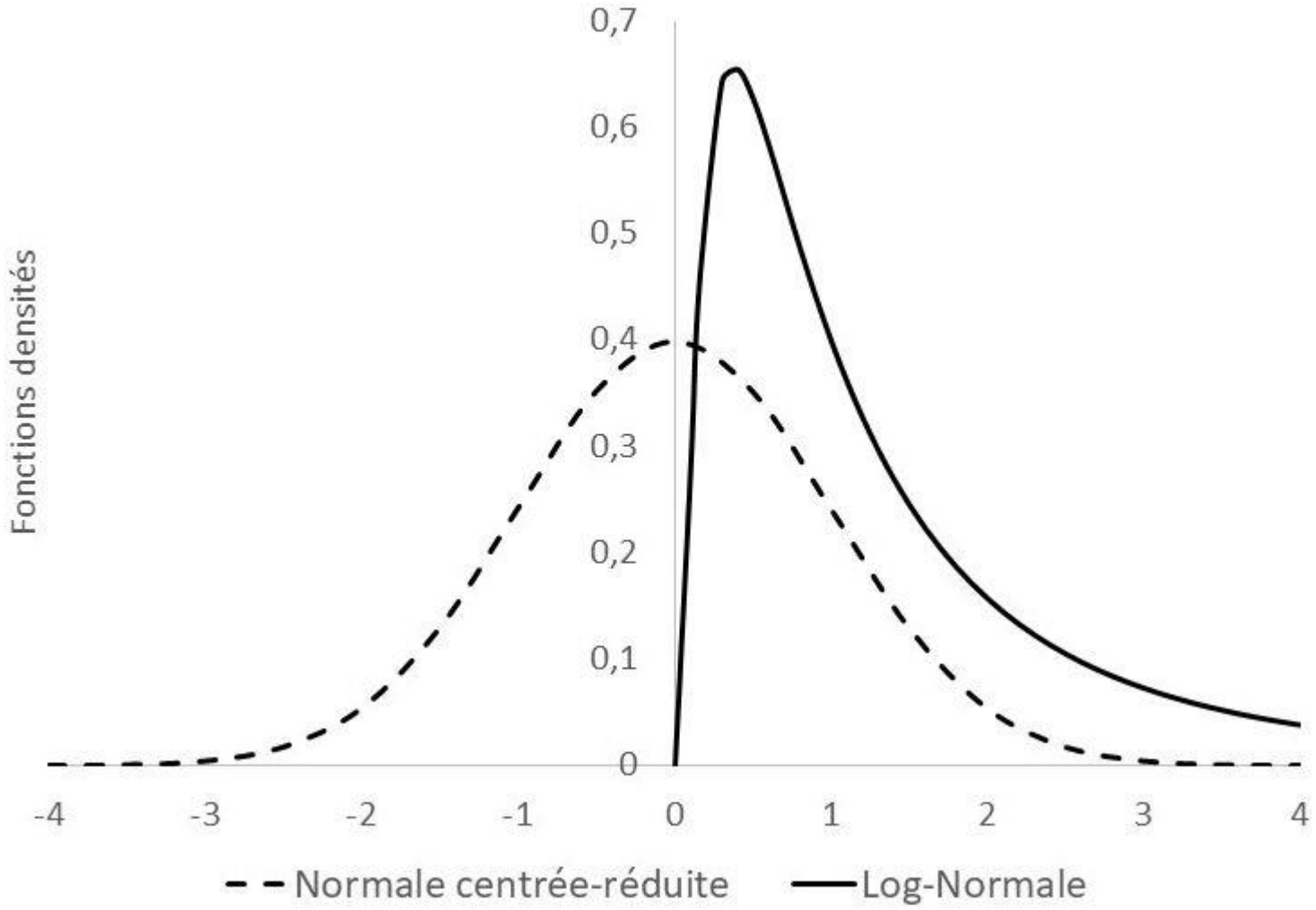
La loi log-normale est utilisée dans de nombreux domaines notamment en finance pour modéliser les cours des instruments financiers (actions, cours de change, taux d'intérêt, etc.)

Les fonctions de densité de probabilité g et de répartition G de la loi log-normale Y se déduisent des fonctions de densité f et de répartition F de la loi normale X :

$$G(y) = P(Y \le y) = P(\ln Y = X \le \ln y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \le 0 \\ F(\ln y) = \dfrac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y) - m_x}{\sigma_x}\right)^2\right] & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \le 0 \\ \dfrac{1}{y} f(\ln y) = \dfrac{1}{y\,\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y) - m_x}{\sigma_x}\right)^2\right] & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

$$Y \longrightarrow LN(0\ ,\ 1) \quad \& \quad U = Ln(Y) \longrightarrow N(0\ ,\ 1)$$



# *Lois de probabilité usuelles – Continues*

Notation : $Y \longrightarrow LN(m_x , \sigma_x^2)$

Y suit une loi Log-normale de paramètres $m_x$ et $\sigma_x^2$.

Valeurs caractéristiques : $LN(Y) = X \longrightarrow N(m_x , \sigma_x^2)$

$E(Y) = m_y = \exp( m_x + \sigma_x^2/2 )$ et $V(Y) = \sigma_y^2 = (\exp(\sigma_x^2) - 1) \exp(2m_x + \sigma_x^2)$

Valeurs caractéristiques : $LN(Y) = U \longrightarrow N(0 , 1)$

$E(Y) = m_y = \exp(1/2)$ et $V(Y) = \sigma_y^2 = \exp(2) - \exp(1)$

Relations entre les caractéristiques des 2 lois :

$E(X) = m_x = \ln(m_y) - \ln(1 + \sigma_y^2/ m_y^2) / 2$ et $V(X) = \sigma_x^2 = \ln(1 + \sigma_y^2/ m_y^2)$

# Lois de probabilité usuelles – Continues

## Exemple d'application 1 :

Lors de l'assemblée générale des actionnaires d'une société cotée en Bourse de Paris, le responsable financier a précisé que le cours de l'action suit une loi log-normale avec un cours moyen de 54.87 € et une volatilité de 5.5 €.

a) Déterminer les caractéristiques de la loi normale suivie par le logarithme du cours du titre .

$$m_x = \ln(m_y) - \ln(1 + \sigma_y^2/m_y^2) / 2 = \ln(54.87) - \ln(1 + 5.5^2 / 54.87^2)/2 = 4$$

$$\sigma_x^2 = \ln(1 + \sigma_y^2/m_y^2) = \ln(1 + 5.5^2 / 54.87^2 ) = 0.01^2$$

$$X = \ln(Y) \longrightarrow N(m_x = 4 , \sigma_x^2 = 0.01^2)$$

b) Probabilité que le cours de l'action soit supérieur à 60 €.

On note G la fonction de répartition de Y et F la fonction de répartition de X.

$$P(Y > 60) = 1 - G(60) = 1 - P(Y \leq 60) = 1 - P[\ln Y \leq \ln(60)] = P[X \leq \ln(60)] = F[\ln(60)]$$

$$= 1 - P(U \leq (\ln(60) - 4) / 0.01) = 1 - \Phi(0.9434)$$

$$= 1 - 0.8273 = 17.27\%$$ cf. table N(0,1).

c) Probabilité que le cours de l'action soit compris entre 50 et 60 €.

$$P(50 < Y < 60) = G(60) - G(50) = F(\ln(60)) - F(\ln(50)) = P[\ \ln(50) \leq X \leq \ln(60)\ ] =$$

$$= P[\ (\ln(60) - 4) / 0.01) \leq U \leq (\ln(50) - 4) / 0.01)\ ]$$

$$= \Phi(0.9434) - \Phi(-0.8798) = 63.78\%$$ cf. table N(0,1).

# *Lois de probabilité usuelles – Continues*

## Exemple d'application 1 :

Y : le cours de l'action → LN($m_x = 4$ , $\sigma_x^2 = 0.01^2$)
et X = ln(Y) → N($m_x = 4$ , $\sigma_x^2 = 0.01^2$)

d) Déterminer la valeur médiane du cours de l'action.

On cherche la médiane y* telle que $P(Y \leq y^*) = 50\%$

$P(Y \leq y^*) = P[X \leq \ln(y^*)] = P[ U \leq (\ln(y^*) - 4) / 0.01) = \Phi [ (\ln(y^*) - 4) / 0.01 ] = 50\%$

$\Rightarrow u = (\ln(y^*) - 4) / 0.01 \quad \Rightarrow y^* = \exp(4) = 54.598$ € ; $y^* = \exp(m_x)$.

# Lois de probabilité usuelles – Continues

## Exemple d'application 2 :

Un investisseur gère un portefeuille de titres financiers dont le revenu annuel Y suit une loi log-normale : $Y \longrightarrow LN(0 , 1)$.

a) Quelle est la probabilité que le revenu du portefeuille dépasse 20% ?

Y : le revenu du portefeuille → $LN(m_x = 0 , \sigma_x^2 = 1)$
et $U = \ln(Y)$ On note G la fonction de répartition→ $N(m_x = 0 , \sigma_x^2 = 1)$

de Y et $\Phi$ la fonction de répartition de U.

$$P(Y > 0.20) = 1 - G(0.20) = 1 - P(Y \leq 0.20) = 1 - P[\ln Y \leq \ln(0.20)]$$
$$= 1 - P[X \leq \ln(0.20)] = 1 - \Phi[\ln(0.20)] = 1 - \Phi(-1.6094)$$
$$= \Phi(1.6094) = 94.62\% \quad \text{cf. table N(0,1).}$$

b) Quelle est la probabilité que le revenu du portefeuille soit compris entre 12% et 20% ?

$$P(0.12 < Y < 0.20) = P[\ln(0.12) < U < \ln(0.20)] = \Phi[\ln(0.20)] - \Phi[\ln(0.12)]$$
$$= \Phi(-1.6094) - \Phi(-2.1203) = \Phi(2.1203) - \Phi(1.6094) = 3.68\%.$$

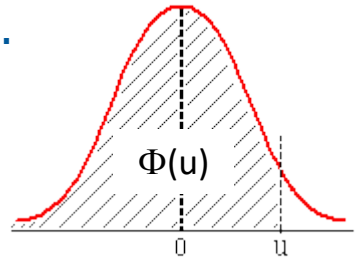
cf. table N(0,1) : $\Phi(2.1203) = 98.30\%$ et $\Phi(1.6094) = 94.62\%$

# Table statistique de la loi normale centrée-réduite : N(0 , 1)

## Fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite : U → N( 0 , 1).

Probabilité de trouver une valeur inférieure à u.

$\Phi(u) = P(U \leq u)$ ; $\Phi(-u) = P(U \leq -u) = 1 - \Phi(u)$




| u | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.50000 | 0.50399 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 | 0.51994 | 0.52392 | 0.52790 | 0.53188 | 0.53586 |
| 0.1 | 0.53983 | 0.54380 | 0.54776 | 0.55172 | 0.55567 | 0.55962 | 0.56356 | 0.56749 | 0.57142 | 0.57535 |
| 0.2 | 0.57926 | 0.58317 | 0.58706 | 0.59095 | 0.59483 | 0.59871 | 0.60257 | 0.60642 | 0.61026 | 0.61409 |
| 0.3 | 0.61791 | 0.62172 | 0.62552 | 0.62930 | 0.63307 | 0.63683 | 0.64058 | 0.64431 | 0.64803 | 0.65173 |
| 0.4 | 0.65542 | 0.65910 | 0.66276 | 0.66640 | 0.67003 | 0.67364 | 0.67724 | 0.68082 | 0.68439 | 0.68793 |
| 0.5 | 0.69146 | 0.69497 | 0.69847 | 0.70194 | 0.70540 | 0.70884 | 0.71226 | 0.71566 | 0.71904 | 0.72240 |
| 0.6 | 0.72575 | 0.72907 | 0.73237 | 0.73565 | 0.73891 | 0.74215 | 0.74537 | 0.74857 | 0.75175 | 0.75490 |
| 0.7 | 0.75804 | 0.76115 | 0.76424 | 0.76730 | 0.77035 | 0.77337 | 0.77637 | 0.77935 | 0.78230 | 0.78524 |
| 0.8 | 0.78814 | 0.79103 | 0.79389 | 0.79673 | 0.79955 | 0.80234 | 0.80511 | 0.80785 | 0.81057 | 0.81327 |
| 0.9 | 0.81594 | 0.81859 | 0.82121 | 0.82381 | 0.82639 | 0.82894 | 0.83147 | 0.83398 | 0.83646 | 0.83891 |
| 1.0 | 0.84134 | 0.84375 | 0.84614 | 0.84849 | 0.85083 | 0.85314 | 0.85543 | 0.85769 | 0.85993 | 0.86214 |
| 1.1 | 0.86433 | 0.86650 | 0.86864 | 0.87076 | 0.87286 | 0.87493 | 0.87698 | 0.87900 | 0.88100 | 0.88298 |
| 1.2 | 0.88493 | 0.88686 | 0.88877 | 0.89065 | 0.89251 | 0.89435 | 0.89617 | 0.89796 | 0.89973 | 0.90147 |
| 1.3 | 0.90320 | 0.90490 | 0.90658 | 0.90824 | 0.90988 | 0.91149 | 0.91309 | 0.91466 | 0.91621 | 0.91774 |
| 1.4 | 0.91924 | 0.92073 | 0.92220 | 0.92364 | 0.92507 | 0.92647 | 0.92785 | 0.92922 | 0.93056 | 0.93189 |
| 1.5 | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 | 0.93822 | 0.93943 | 0.94062 | 0.94179 | 0.94295 | 0.94408 |
| 1.6 | 0.94520 | 0.94630 | 0.94738 | 0.94845 | 0.94950 | 0.95053 | 0.95154 | 0.95254 | 0.95352 | 0.95449 |
| 1.7 | 0.95543 | 0.95637 | 0.95728 | 0.95818 | 0.95907 | 0.95994 | 0.96080 | 0.96164 | 0.96246 | 0.96327 |
| 1.8 | 0.96407 | 0.96485 | 0.96562 | 0.96638 | 0.96712 | 0.96784 | 0.96856 | 0.96926 | 0.96995 | 0.97062 |
| 1.9 | 0.97128 | 0.97193 | 0.97257 | 0.97320 | 0.97381 | 0.97441 | 0.97500 | 0.97558 | 0.97615 | 0.97670 |
| 2.0 | 0.97725 | 0.97778 | 0.97831 | 0.97882 | 0.97932 | 0.97982 | 0.98030 | 0.98077 | 0.98124 | 0.98169 |
| 2.1 | 0.98214 | 0.98257 | 0.98300 | 0.98341 | 0.98382 | 0.98422 | 0.98461 | 0.98500 | 0.98537 | 0.98574 |
| 2.2 | 0.98610 | 0.98645 | 0.98679 | 0.98713 | 0.98745 | 0.98778 | 0.98809 | 0.98840 | 0.98870 | 0.98899 |
| 2.3 | 0.98928 | 0.98956 | 0.98983 | 0.99010 | 0.99036 | 0.99061 | 0.99086 | 0.99111 | 0.99134 | 0.99158 |
| 2.4 | 0.99180 | 0.99202 | 0.99224 | 0.99245 | 0.99266 | 0.99286 | 0.99305 | 0.99324 | 0.99343 | 0.99361 |
| 2.5 | 0.99379 | 0.99396 | 0.99413 | 0.99430 | 0.99446 | 0.99461 | 0.99477 | 0.99492 | 0.99506 | 0.99520 |
| 2.6 | 0.99534 | 0.99547 | 0.99560 | 0.99573 | 0.99585 | 0.99598 | 0.99609 | 0.99621 | 0.99632 | 0.99643 |
| 2.7 | 0.99653 | 0.99664 | 0.99674 | 0.99683 | 0.99693 | 0.99702 | 0.99711 | 0.99720 | 0.99728 | 0.99736 |
| 2.8 | 0.99744 | 0.99752 | 0.99760 | 0.99767 | 0.99774 | 0.99781 | 0.99788 | 0.99795 | 0.99801 | 0.99807 |
| 2.9 | 0.99813 | 0.99819 | 0.99825 | 0.99831 | 0.99836 | 0.99841 | 0.99846 | 0.99851 | 0.99856 | 0.99861 |
| 3.0 | 0.99865 | 0.99869 | 0.99874 | 0.99878 | 0.99882 | 0.99886 | 0.99889 | 0.99893 | 0.99896 | 0.99900 |
| 3.1 | 0.99903 | 0.99906 | 0.99910 | 0.99913 | 0.99916 | 0.99918 | 0.99921 | 0.99924 | 0.99926 | 0.99929 |
| 3.2 | 0.99931 | 0.99934 | 0.99936 | 0.99938 | 0.99940 | 0.99942 | 0.99944 | 0.99946 | 0.99948 | 0.99950 |
| 3.3 | 0.99952 | 0.99953 | 0.99955 | 0.99957 | 0.99958 | 0.99960 | 0.99961 | 0.99962 | 0.99964 | 0.99965 |
| 3.4 | 0.99966 | 0.99968 | 0.99969 | 0.99970 | 0.99971 | 0.99972 | 0.99973 | 0.99974 | 0.99975 | 0.99976 |
| 3.5 | 0.99977 | 0.99978 | 0.99978 | 0.99979 | 0.99980 | 0.99981 | 0.99981 | 0.99982 | 0.99983 | 0.99983 |
| 3.6 | 0.99984 | 0.99985 | 0.99985 | 0.99986 | 0.99986 | 0.99987 | 0.99987 | 0.99988 | 0.99988 | 0.99989 |
| 3.7 | 0.99989 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99991 | 0.99991 | 0.99992 | 0.99992 | 0.99992 | 0.99992 |

Exemples :

$P(U \leq 1.26) = \Phi(1.26) = 89.62\%$

$P(U \leq -1.51) = \Phi(-1.51) = 1 - \Phi(1.51)$
$= 1 - 0.9345 = 6.55\%$

# Fractiles de la Loi Normale : U → N( 0 , 1)

Pour P < 0.5 (colonne de gauche et ligne supérieure). les fractiles sont négatifs.
Pour P > 0.5 (colonne de droite et ligne inférieure). les fractiles sont positifs.

| P | 0 | 0.001 | 0.002 | 0.003 | 0.004 | 0.005 | 0.006 | 0.007 | 0.008 | 0.009 | 0.01 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | infini | 3.0902 | 2.8782 | 2.7478 | 2.6521 | 2.5758 | 2.5121 | 2.4573 | 2.4089 | 2.3656 | 2.3263 | 0.99 |
| 0.01 | 2.3263 | 2.2904 | 2.2571 | 2.2262 | 2.1973 | 2.1701 | 2.1444 | 2.1201 | 2.0969 | 2.0748 | 2.0537 | 0.98 |
| 0.02 | 2.0537 | 2.0335 | 2.0141 | 1.9954 | 1.9774 | 1.9600 | 1.9431 | 1.9268 | 1.9110 | 1.8957 | 1.8808 | 0.97 |
| 0.03 | 1.8808 | 1.8663 | 1.8522 | 1.8384 | 1.8250 | 1.8119 | 1.7991 | 1.7866 | 1.7744 | 1.7624 | 1.7507 | 0.96 |
| 0.04 | 1.7507 | 1.7392 | 1.7279 | 1.7169 | 1.7060 | 1.6954 | 1.6849 | 1.6747 | 1.6646 | 1.6546 | 1.6449 | 0.95 |
| 0.05 | 1.6449 | 1.6352 | 1.6258 | 1.6164 | 1.6072 | 1.5982 | 1.5893 | 1.5805 | 1.5718 | 1.5632 | 1.5548 | 0.94 |
| 0.06 | 1.5548 | 1.5464 | 1.5382 | 1.5301 | 1.5220 | 1.5141 | 1.5063 | 1.4985 | 1.4909 | 1.4833 | 1.4758 | 0.93 |
| 0.07 | 1.4758 | 1.4684 | 1.4611 | 1.4538 | 1.4466 | 1.4395 | 1.4325 | 1.4255 | 1.4187 | 1.4118 | 1.4051 | 0.92 |
| 0.08 | 1.4051 | 1.3984 | 1.3917 | 1.3852 | 1.3787 | 1.3722 | 1.3658 | 1.3595 | 1.3532 | 1.3469 | 1.3408 | 0.91 |
| 0.09 | 1.3408 | 1.3346 | 1.3285 | 1.3225 | 1.3165 | 1.3106 | 1.3047 | 1.2988 | 1.2930 | 1.2873 | 1.2816 | 0.90 |
| 0.10 | 1.2816 | 1.2759 | 1.2702 | 1.2646 | 1.2591 | 1.2536 | 1.2481 | 1.2426 | 1.2372 | 1.2319 | 1.2265 | 0.89 |
| 0.11 | 1.2265 | 1.2212 | 1.2160 | 1.2107 | 1.2055 | 1.2004 | 1.1952 | 1.1901 | 1.1850 | 1.1800 | 1.1750 | 0.88 |
| 0.12 | 1.1750 | 1.1700 | 1.1650 | 1.1601 | 1.1552 | 1.1503 | 1.1455 | 1.1407 | 1.1359 | 1.1311 | 1.1264 | 0.87 |
| 0.13 | 1.1264 | 1.1217 | 1.1170 | 1.1123 | 1.1077 | 1.1031 | 1.0985 | 1.0939 | 1.0893 | 1.0848 | 1.0803 | 0.86 |
| 0.14 | 1.0803 | 1.0758 | 1.0714 | 1.0669 | 1.0625 | 1.0581 | 1.0537 | 1.0494 | 1.0451 | 1.0407 | 1.0364 | 0.85 |
| 0.15 | 1.0364 | 1.0322 | 1.0279 | 1.0237 | 1.0194 | 1.0152 | 1.0110 | 1.0069 | 1.0027 | 0.9986 | 0.9945 | 0.84 |
| 0.16 | 0.9945 | 0.9904 | 0.9863 | 0.9822 | 0.9782 | 0.9741 | 0.9701 | 0.9661 | 0.9621 | 0.9581 | 0.9542 | 0.83 |
| 0.17 | 0.9542 | 0.9502 | 0.9463 | 0.9424 | 0.9385 | 0.9346 | 0.9307 | 0.9269 | 0.9230 | 0.9192 | 0.9154 | 0.82 |
| 0.18 | 0.9154 | 0.9116 | 0.9078 | 0.9040 | 0.9002 | 0.8965 | 0.8927 | 0.8890 | 0.8853 | 0.8816 | 0.8779 | 0.81 |
| 0.19 | 0.8779 | 0.8742 | 0.8706 | 0.8669 | 0.8632 | 0.8596 | 0.8560 | 0.8524 | 0.8488 | 0.8452 | 0.8416 | 0.80 |
| 0.20 | 0.8416 | 0.8381 | 0.8345 | 0.8310 | 0.8274 | 0.8239 | 0.8204 | 0.8169 | 0.8134 | 0.8099 | 0.8064 | 0.79 |
| 0.21 | 0.8064 | 0.8030 | 0.7995 | 0.7961 | 0.7926 | 0.7892 | 0.7858 | 0.7824 | 0.7790 | 0.7756 | 0.7722 | 0.78 |
| 0.22 | 0.7722 | 0.7688 | 0.7655 | 0.7621 | 0.7588 | 0.7554 | 0.7521 | 0.7488 | 0.7454 | 0.7421 | 0.7388 | 0.77 |
| 0.23 | 0.7388 | 0.7356 | 0.7323 | 0.7290 | 0.7257 | 0.7225 | 0.7192 | 0.7160 | 0.7128 | 0.7095 | 0.7063 | 0.76 |
| 0.24 | 0.7063 | 0.7031 | 0.6999 | 0.6967 | 0.6935 | 0.6903 | 0.6871 | 0.6840 | 0.6808 | 0.6776 | 0.6745 | 0.75 |
| 0.25 | 0.6745 | 0.6713 | 0.6682 | 0.6651 | 0.6620 | 0.6588 | 0.6557 | 0.6526 | 0.6495 | 0.6464 | 0.6433 | 0.74 |
| 0.26 | 0.6433 | 0.6403 | 0.6372 | 0.6341 | 0.6311 | 0.6280 | 0.6250 | 0.6219 | 0.6189 | 0.6158 | 0.6128 | 0.73 |
| 0.27 | 0.6128 | 0.6098 | 0.6068 | 0.6038 | 0.6008 | 0.5978 | 0.5948 | 0.5918 | 0.5888 | 0.5858 | 0.5828 | 0.72 |
| 0.28 | 0.5828 | 0.5799 | 0.5769 | 0.5740 | 0.5710 | 0.5681 | 0.5651 | 0.5622 | 0.5592 | 0.5563 | 0.5534 | 0.71 |
| 0.29 | 0.5534 | 0.5505 | 0.5476 | 0.5446 | 0.5417 | 0.5388 | 0.5359 | 0.5330 | 0.5302 | 0.5273 | 0.5244 | 0.70 |
| 0.30 | 0.5244 | 0.5215 | 0.5187 | 0.5158 | 0.5129 | 0.5101 | 0.5072 | 0.5044 | 0.5015 | 0.4987 | 0.4958 | 0.69 |
| 0.31 | 0.4958 | 0.4930 | 0.4902 | 0.4874 | 0.4845 | 0.4817 | 0.4789 | 0.4761 | 0.4733 | 0.4705 | 0.4677 | 0.68 |
| 0.32 | 0.4677 | 0.4649 | 0.4621 | 0.4593 | 0.4565 | 0.4538 | 0.4510 | 0.4482 | 0.4454 | 0.4427 | 0.4399 | 0.67 |
| 0.33 | 0.4399 | 0.4372 | 0.4344 | 0.4316 | 0.4289 | 0.4261 | 0.4234 | 0.4207 | 0.4179 | 0.4152 | 0.4125 | 0.66 |
| 0.34 | 0.4125 | 0.4097 | 0.4070 | 0.4043 | 0.4016 | 0.3989 | 0.3961 | 0.3934 | 0.3907 | 0.3880 | 0.3853 | 0.65 |
| 0.35 | 0.3853 | 0.3826 | 0.3799 | 0.3772 | 0.3745 | 0.3719 | 0.3692 | 0.3665 | 0.3638 | 0.3611 | 0.3585 | 0.64 |
| 0.36 | 0.3585 | 0.3558 | 0.3531 | 0.3505 | 0.3478 | 0.3451 | **0.3425** | 0.3398 | 0.3372 | 0.3345 | 0.3319 | 0.63 |
| 0.37 | 0.3319 | 0.3292 | 0.3266 | 0.3239 | 0.3213 | 0.3186 | 0.3160 | 0.3134 | 0.3107 | 0.3081 | 0.3055 | 0.62 |
| 0.38 | 0.3055 | 0.3029 | 0.3002 | 0.2976 | 0.2950 | 0.2924 | 0.2898 | 0.2871 | 0.2845 | 0.2819 | 0.2793 | 0.61 |
| 0.39 | 0.2793 | 0.2767 | 0.2741 | 0.2715 | 0.2689 | 0.2663 | 0.2637 | 0.2611 | 0.2585 | 0.2559 | 0.2533 | 0.60 |
| 0.40 | 0.2533 | 0.2508 | **0.2482** | 0.2456 | 0.2430 | 0.2404 | 0.2378 | 0.2353 | 0.2327 | 0.2301 | 0.2275 | 0.59 |
| 0.41 | 0.2275 | 0.2250 | 0.2224 | 0.2198 | 0.2173 | 0.2147 | 0.2121 | 0.2096 | 0.2070 | 0.2045 | 0.2019 | 0.58 |
| 0.42 | 0.2019 | 0.1993 | 0.1968 | 0.1942 | 0.1917 | 0.1891 | 0.1866 | 0.1840 | 0.1815 | 0.1789 | 0.1764 | 0.57 |
| 0.43 | 0.1764 | 0.1738 | 0.1713 | 0.1687 | 0.1662 | 0.1637 | 0.1611 | 0.1586 | 0.1560 | 0.1535 | 0.1510 | 0.56 |
| 0.44 | 0.1510 | 0.1484 | 0.1459 | 0.1434 | 0.1408 | 0.1383 | 0.1358 | 0.1332 | 0.1307 | 0.1282 | 0.1257 | 0.55 |
| 0.45 | 0.1257 | 0.1231 | 0.1206 | 0.1181 | 0.1156 | 0.1130 | 0.1105 | 0.1080 | 0.1055 | 0.1030 | 0.1004 | 0.54 |
| 0.46 | 0.1004 | 0.0979 | 0.0954 | 0.0929 | 0.0904 | 0.0878 | 0.0853 | 0.0828 | 0.0803 | 0.0778 | 0.0753 | 0.53 |
| 0.47 | 0.0753 | 0.0728 | 0.0702 | 0.0677 | 0.0652 | 0.0627 | 0.0602 | 0.0577 | 0.0552 | 0.0527 | 0.0502 | 0.52 |
| 0.48 | 0.0502 | 0.0476 | 0.0451 | 0.0426 | 0.0401 | 0.0376 | 0.0351 | 0.0326 | 0.0301 | 0.0276 | 0.0251 | 0.51 |
| 0.49 | 0.0251 | 0.0226 | 0.0201 | 0.0175 | 0.0150 | 0.0125 | 0.0100 | 0.0075 | 0.0050 | 0.0025 | 0.0000 | 0.50 |
| | 0.01 | 0.009 | 0.008 | 0.007 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0 | P |

Exemples :

$\Phi(u) = P(U \leq u) = P = 0.6340$

$\Rightarrow u = 0.3425$

$\Phi(u) = P(U \leq u) = P = 0.4020$

$\Rightarrow u = -0.2482$