UFR DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION

UNIVERSITÉ DE LYON

Support de cours

L3 – S5 : Statistique & Probabilités

Chapitre 5 : Approximation & Convergence

Année Universitaire : 2024-2025

R. Abdesselam

UFR de Sciences Economiques et de Gestion

Université Lumière Lyon 2, Campus Berges du Rhône

Rafik.abdesselam@univ-lyon2.fr

http://perso.univ-lyon2.fr/~rabdesse/Documents/

Chapitre 5 : Approximation et convergence

Introduction

Identifier ou reconnaître la loi de probabilité courante suivie par une variable aléatoire donnée est essentiel, cela conditionne le choix de la loi ajustée à un phénomène donné.

Dans ce chapitre, sont traités les notions de convergence et d'approximation de lois de probabilité usuelles, éléments dont les applications pratiques sont nombreuses.

Ce chapitre repose sur le théorème fondamental des probabilités « *Théorème Central Limite (TCL)* ». Ce dernier, s'applique quelque soit la loi de probabilité suivie par les variables aléatoires (discrètes ou continues), pourvu que les n expériences répétées soient indépendantes et en très grand nombre (n est grand)

A l'aide de la notion de la convergence en loi et du TCL (Paragraphe 5.2), il est possible de faire des approximations (Paragraphe 5.1) de certaines lois de probabilité par d'autres et notamment vers la loi normale.

Les éléments présentés permettent de préciser ce que signifie l'ajustement d'une loi de probabilité par une autre (notion de convergence) et ainsi de justifier l'approximation d'une loi exacte (observée) par une loi approchée (théorique).

5.1 Approximation d'une loi discrète finie par une loi discrète finie

- Hypergéométrique par une binomiale : H(N, n , p) ≈ B(n , p)

Comme nous l'avons mentionné précédemment, Le facteur de correction de la variance ou d'exhaustivité : (N - n)/(N - 1) de la loi Hypergéométrique est voisin de 1 lorsque la taille n de l'échantillon prélevé est petite par rapport à la taille N de la population, c'est-à-dire lorsque le taux de sondage $t = n/N$ est faible.

$$\frac{N-n}{N-1} = \frac{\frac{N-n}{N}}{\frac{N-1}{N}} = \frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{1}{N}} = \frac{1-t}{1-\frac{1}{N}} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1$$

Si $N >> n$, cela revient à considérer les tirages dépendants (sans remise – Exhaustifs) de la loi Hypergéométrique comme des tirages indépendants (avec remise – Non exhaustifs) de la loi Binomiale.

En pratique, la loi Hypergéométrique (loi exacte) peut être approximée par une loi Binomiale (loi approchée) sous certaines conditions :

H(N, n , p) ≈ B(n , p) lorsque taux de sondage $t = n/N < 10\%$

Plus le taux de sondage est petit, meilleure sera l'approximation (la population est 10 fois plus grande que l'échantillon)

Approximation

Exemple d'approximation : Contrôle de qualité

A la sortie d'une chaîne de fabrication, on prélève 10 pièces, une à une, sans remise, d'un lot de 200 pièces d'apparence identiques. On sait par ailleurs, que la proportion de pièces défectueuses dans ce lot est de l'ordre de 7.5%.

1) Reconnaître la loi exacte du nombre de pièces défectueuses parmi les 10 pièces de l'échantillon prélevé.

X : le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon

$X \longrightarrow H\,(N = 200\ ,\ n = 10\ ,\ p = 0.075)$; $p = a/N \Rightarrow a = p\,N = 15$; $b = N - a = 185$

$P(X = k) = C_{10}^{k}\ C_{185}^{10-k}\ /\ C_{200}^{10} \qquad k = 0, 1, \dots, 10$

2) Quelle la probabilité d'avoir exactement 2 pièces défectueuses ? Plus de 3 et au plus 5 pièces défectueuses dans l'échantillon prélevé ?

$P(X = 2) = C_{10}^{2}\ C_{185}^{8}\ /\ C_{200}^{10} = 0.136511 = \mathbf{13.65\%}$

$P(3 < X \leq 5) = P(X = 4) + P(X = 5) = F(5) - F(3) = 0.003347 = \mathbf{0.3347\%}$

3) Calculer le taux de sondage. Par quelle loi discrète peut-on approcher la loi de X ? En déduire les valeurs approchées des probabilités précédentes.

taux de sondage : $t = n / N = 10 / 200 = 5\%$ (< 10%, condition d'approximation respectée)

$X \longrightarrow H\,(N = 200\ ,\ n = 10\ ,\ p = 7.5\%) \approx B(n = 10\ ,\ p = 7.5\%)$

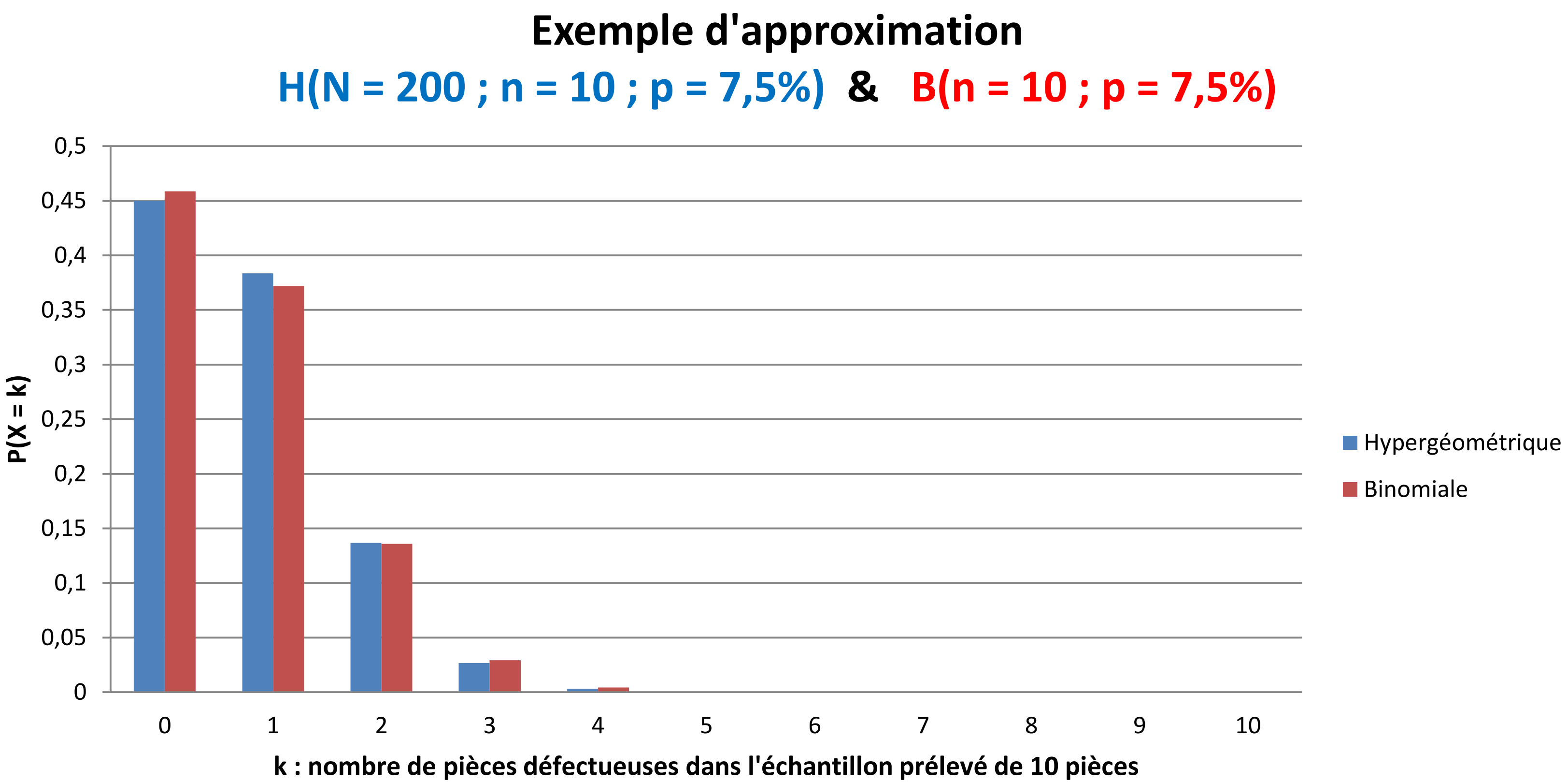
Les valeurs approchées : $P(X = 2) = C_{10}^{2}\ (0.075)^2\ (0.825)^8 = 0.13666 = \mathbf{13.66\%}$

$P(3 < X \leq 5) = P(X = 4) + P(X = 5) = F(5) - F(3) = 0.004567 = \mathbf{0.4567\%}$

Approximation

Exemple d'approximation : Contrôle de qualité

A la sortie d'une chaîne de fabrication, on prélève 10 pièces, une à une, sans remise, d'un lot de 200 pièces d'apparence identiques. On sait par ailleurs, que la proportion de pièces défectueuses dans ce lot est de l'ordre de 7.5%.



5.2 Approximation d'une loi discrète finie par une loi discrète infinie

- Loi Binomiale par une loi de Poisson : $B(n , p) \approx P(\lambda)$

La loi de Poisson qui ne dépend que d'un seul paramètre λ, peut également s'avérer utile pour obtenir une approximation très satisfaisante de la loi binomiale. L'approximation est valable en autant que certaines conditions sont réalisées.

L'approximation sera d'autant meilleure que la taille d'échantillon n est grande et la probabilité p est faible tout en ayant np de l'ordre de quelques unités.

En pratique, la loi Binomiale (loi exacte) peut être approximée par une loi de Poisson (loi approchée) sous certaines conditions :

$$B(n , p) \approx P(\lambda) \quad \text{avec} \quad \lambda = np$$

L'approximation est acceptable lorsque $n \geq 30$; $p < 10\%$ ($np < 5$)

Approximation

Exemple d'approximation :

Une compagnie d'assurances considère que la probabilité pour un automobiliste d'avoir un accident par mois est de l'ordre de 0.1%. Cette compagnie dispose de 2000 contrats (les accidents sont supposés indépendants).

1) Reconnaître la loi exacte du nombre d'accidents/mois de cette compagnie parmi les 2000 contrats d'assurance automobile.

X : le nombre d'accidents/mois ; $X \rightarrow B(n = 2000 ; p = 0.001)$

$$P(X = k) = C_{2000}^{k} \; 0.001^{k} \, 0.999^{2000-k} \quad k = 0, 1, \ldots, 2000$$

2) Combien d'accidents en moyenne, cette compagnie peut-elle enregistrer au cours d'un mois donné ? $E(X) = np = 2$ accidents/mois

3) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun accident un mois donné ? Moins de 2 accidents/mois ?

$$P(X = 0) = C_{2000}^{0} \; 0.001^{0} \, 0.999^{2000} = 0.999^{2000} = 0.13533528 = \mathbf{13.53\%}$$

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = F(1) = 0.40600585 = \mathbf{40.60\%}$$

4) Par quelle loi discrète peut-on approcher la loi de X ? En déduire les valeurs approchées des probabilités précédentes.

$n = 2000$ (≥ 30) ; $p = 0.1\%$ $(< 10\%)$ et $np = 2$ (< 5) *(Les conditions sont respectées)*

$X \rightarrow B(n = 2000 ; p = 0.1\%) \approx P(\lambda = np = 2)$; $P(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^{k}/k!$ $k=0,1, \ldots, +\infty$

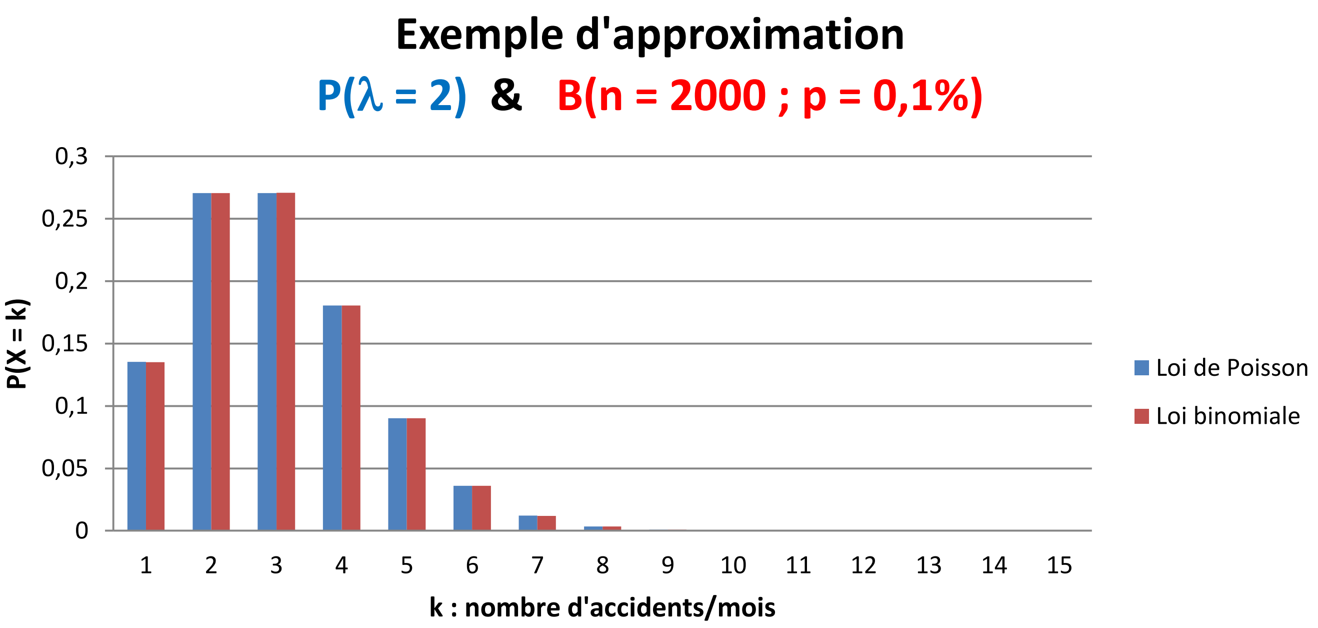
Les valeurs approchées : $P(X = 0) = e^{-2} \, 2^{0}/0! = e^{-2} = 0.13519993 = \mathbf{13.52\%}$

$P(X < 2) = P(X= 0) + P(X = 1) = 0.40587045 = \mathbf{40.59\%}$

Approximation

Exemple d'approximation :

Une compagnie d'assurances considère que la probabilité pour un automobiliste d'avoir un accident par mois est de l'ordre de 0.1%. Cette compagnie dispose de 2000 contrats (les accidents sont supposés indépendants).



5.3 Approximation d'une loi discrète par une loi continue

- Loi Binomiale par une loi Normale : $B(n\,,\,p) \approx N(m\,;\,\sigma^2)$

Une autre utilisation de la loi normale est l'approximation de probabilités binomiales. La plupart des tables de probabilités binomiales ne donnent que des valeurs de n n'excédant pas 30.

Nous avons déjà traité du cas où l'on peut sous certaines conditions obtenir une approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson. Pour d'autres cas, on s'aperçoit que, à mesure que n croît, la loi binomiale tend vers une distribution limite qui est la distribution normale (Théorème de la limite centrale).

En pratique, l'approximation de la loi binomiale par la loi normale est satisfaisante si les trois conditions suivantes sont remplies :

$$n \geq 30 \quad \textbf{et} \quad np \geq 5 \quad \textbf{et} \quad nq \geq 5$$

$$B(n\,,\,p) \approx N(m\,;\,\sigma^2) \qquad \text{avec} \quad m = np \quad \text{et} \quad \sigma^2 = npq$$

Remarque :

Plus la probabilité p s'éloigne de 1/2 (symétrie), plus la taille de l'échantillon n doit être élevée pour donner une approximation satisfaisante.
L'approximation est d'autant meilleure que n est grand (≥ 30) et p voisin de 1/2.

➢ Poisson par une loi normale : $P(\lambda) \approx N(m\ ;\ \sigma^2)$

De la même façon, on peut obtenir une approximation de la loi discrète infinie de Poisson par la loi normale.

Une approximation satisfaisante de la loi de Poisson par la loi normale sera obtenue sous les conditions suivantes :

$$P(\lambda) \approx N(m\ ;\ \sigma^2) \qquad \text{avec} \qquad m = \sigma^2 = \lambda$$

L'approximation est acceptable lorsque $\lambda \geq 20$

Remarque importante :

Toute approximation d'une loi discrète (Binomiale ou Poisson) par une loi continue (Normale) nécessite une correction de continuité.

On peut résumer dans le tableau suivant la manière de convertir les probabilités des lois discrètes (binomiale, Poisson) pour obtenir une approximation avec la loi continue (normale).

UFR de Sciences économiques et de gestion

Résumé des approximations

$t = n / N \leq 10\%$

$n \geq 30$ et $p < 10\%$ $(np < 5)$

$X \rightarrow H(N, n, p)$

$E(X) = np$

$V(X) = npq\,[(N-n)/(N-1)]$

Discrète finie (sans remise)

$X \rightarrow B(n, p)$

$E(X) = np$

$V(X) = npq$

Discrète finie (avec remise)

$X \rightarrow P(\lambda)$

$E(X) = V(X) = \lambda = np$

Discrète infinie (avec remise)

$n \geq 30$ **et** $np \geq 5$ **et** $nq \geq 5$

$\lambda \geq 20$

$X \rightarrow N(m\,;\,\sigma^2)$

Continue

$m = np\ ;\ \sigma^2 = (\sqrt{npq})^2$

$m = \sigma^2 = \lambda$

C.C. : correction de continuité

Chapitre 5 : Approximation et convergence

On améliore la précision des calculs en utilisant la correction de continuité suivante :

Loi discrète $X \to B(n, p)$ *ou* $P(\lambda)$	*Correction de Continuité*	*Loi continue* $N(m, \sigma^2)$
$P(X = a)$	$\approx_{CC}$	$P(a - 0{,}5 \leq X \leq a + 0{,}5)$
$P(X < a)$	$\approx_{CC}$	$P(X \leq a - 0{,}5)$
$P(X \leq a)$	$\approx_{CC}$	$P(X \leq a + 0{,}5)$
$P(X > a)$	$\approx_{CC}$	$P(X \geq a + 0{,}5)$
$P(X \geq a)$	$\approx_{CC}$	$P(X \geq a - 0{,}5)$
$P(a \leq X \leq b)$	$\approx_{CC}$	$P(a - 0{,}5 \leq X \leq b + 0{,}5)$
$P(a < X < b)$	$\approx_{CC}$	$P(a + 0{,}5 \leq X \leq b - 0{,}5)$
$P(a \leq X < b)$	$\approx_{CC}$	$P(a - 0{,}5 \leq X \leq b - 0{,}5)$
$P(a < X \leq b)$	$\approx_{CC}$	$P(a + 0{,}5 \leq X \leq b + 0{,}5)$

Approximation

0,448120975

Exemple d'approximation 1 :

D'après une étude réalisée auprès des assurés d'une compagnie, il semble que 30% des assurés sont intéressés par un nouveau contrat pour renforcer leur protection en cas d'accident corporel de la vie quotidienne. Le responsable interroge 70 assurés choisis au hasard afin de connaître leur réaction sur ce nouveau contrat.

X : le nombre d'assurés intéressés par le nouveau contrat

Loi exacte : $X \rightarrow B(n = 70 ; p = 0.3)$; $P(X = k) = C_{70}^{k}\ 0.3^{k}\ 0.7^{30-k}$ $k = 0, 1, \ldots, 70$

Conditions d'approximation par une loi normales sont vérifiées :

$n = 70\ (\geq 30)$ et $np = 21\ (> 5)$ et $nq = 49\ (> 5)$

$X \rightarrow B(n = 70 ; p = 0.3) \approx N(\, m = E(X) = np = 21 ;\ \sigma^2 = npq = 14.7 = 3.83^2\,)$

1) Donner une valeur approchée de la probabilité que 15 assurés se déclarent intéressés par ce nouveau contrat ?

$P(X = 15) \approx_{C.C.} P(14.5 \leq X \leq 15.5) = P(-1.697 \leq U \leq -1.436) = \Phi(-1.436) - \Phi(-1.697)$

$= \Phi(1.697) - \Phi(1.436) = 0{,}03070693 =$ **3.07%** **cf. table N(0,1)**

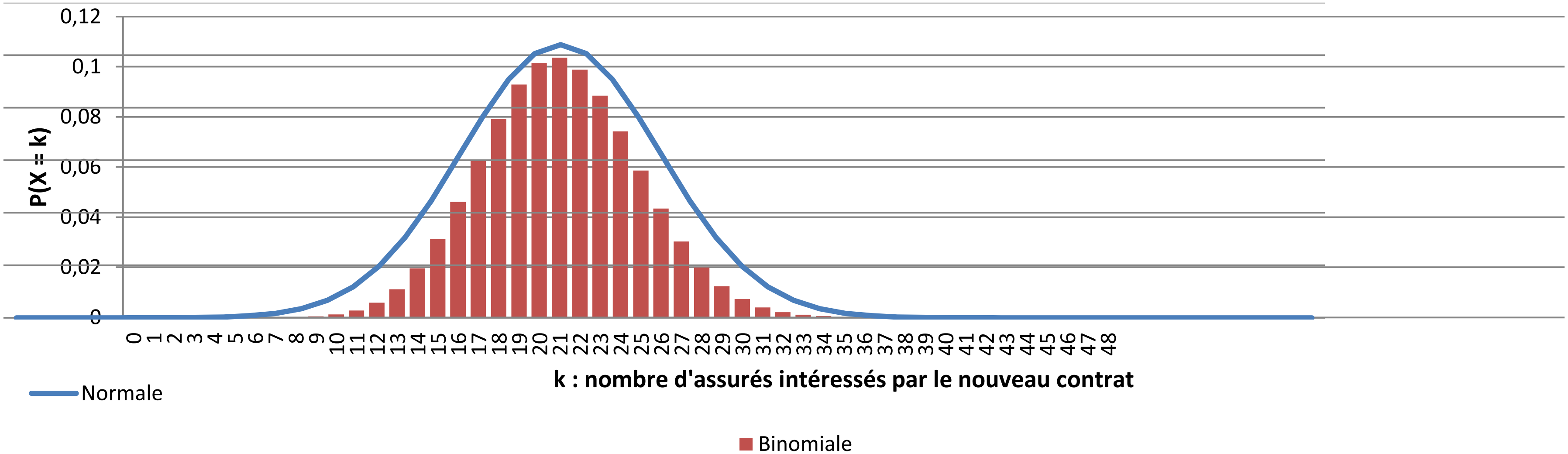
2) Quelle est la probabilité qu'au plus 20 assurés se déclarent intéressés par ce nouveau contrat ?

$P(X \leq 20) \approx_{C.C.} P(X \leq 20.5) = P(U \leq -0.13054) = 1 - \Phi(0.13054) = 0.448120 =$ **44.81%**

** C.C. : Correction de Continuité*

Approximation

Exemple d'approximation 1 : $B(n = 70 ; p = 0,3)$ & $N(m = 21 ; \sigma^2 = 3.83^2)$



Valeur approchées :

$P(X = 15) \approx_{C.C.} P(14.5 \leq X \leq 15.5) = 3.07\%$

$P(X \leq 20) \approx_{C.C.} P(X \leq 20.5) = 44.81\%$

Valeurs exactes :

	B(70 ; 0,3)	
k	P(X = k)	F(x)
0	1,43504E-11	1,43504E-11
1	4,30511E-10	4,44861E-10
:	:	:
14	0,019557609	0,041269669
15	**0,031292174**	0,072561843
:	:	:
20	0,101515566	0,455020367
:		
70	2,50316E-37	1

$P(X = 15) = \mathbf{3.13\%}$

$$P(X \leq 20) = \sum_{k=0}^{20} P(X = k) = \mathbf{45.50\%}$$

Exemple d'approximation 2 :

Soit On a observé dans un bureau de poste du centre ville de Lyon, que la probabilité pour qu'une personne se présente à un guichet suit une loi de poisson dont l'espérance mathématique est de l'ordre de 1.4 client par minute. La probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée.

1) Quelle est la loi de probabilité exacte du nombre de personnes qui se présentent à l'ouverture du bureau de poste entre 9h et 9h15 ?

X : nombre de personnes qui se présentent au bureau par minute : $X \rightarrow P(\lambda = 1.4)$

Y : nombre de personnes qui se présentent au bureau par quart d'heure :

$$\left.\begin{array}{l} X_i \rightarrow P(\lambda = 1.4) \\ X_i \text{ indépendantes} \end{array}\right\} \quad Y = \Sigma_{i=1}^{15} X_i \rightarrow P(\beta = 15 \times 1.4 = 21)$$

La condition d'approximation de Y par une loi normale est vérifiée :

$E(Y) = V(Y) = \beta = 21\ (> 20) = 25$; $P(X = k) = e^{-\lambda}\, \lambda^k / k!$ $\quad k = 0, 1, \ldots, +\infty$

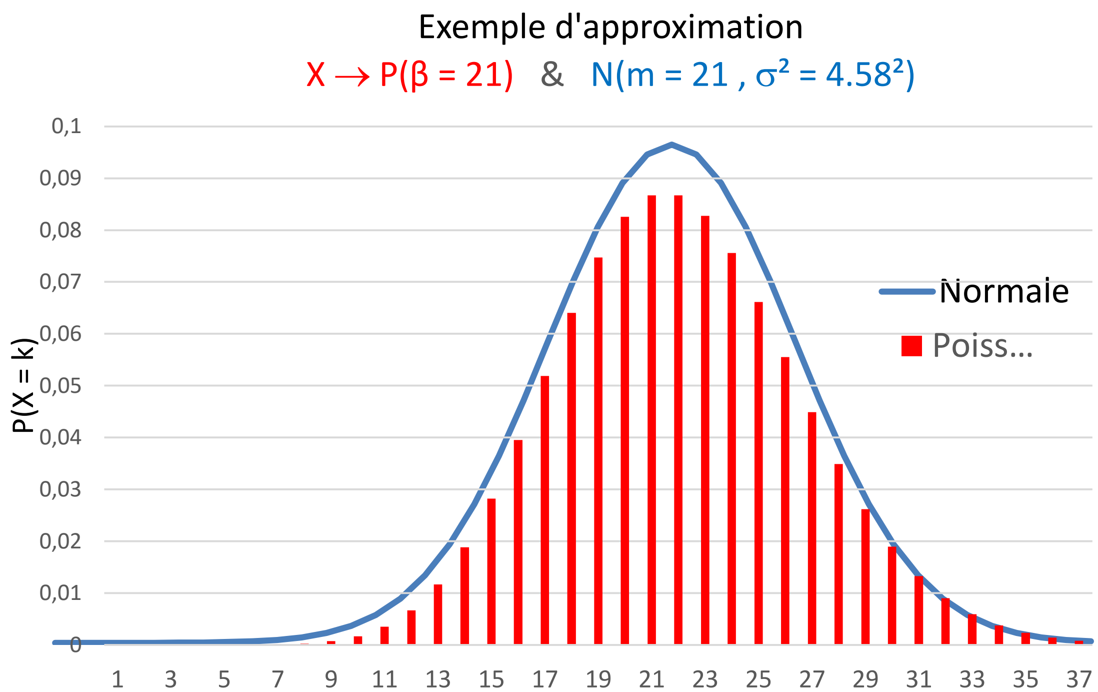
$Y \rightarrow P(\beta = 21) \approx N(m = \lambda = 21\ ;\ \sigma^2 = 4.58^2)$

2) Donner une valeur approchée de la probabilité pour que plus de 25 personnes se présentent au guichet entre 9h et 9h 15 ?

$$P(Y > 25) = 1 - P(Y \leq 25) \approx_{C.C.} 1 - P(Y \leq 25.5) = 1 - P(U \leq 0.9825)$$
$$= 1 - \Phi(0.9825) = 1 - 0.8369 = 16.31\%$$

Approximation

Exemple d'approximation 2 :



5.2 Convergence - Théorèmes limites

5.2.1 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Ces inégalités qui s'appliquent à une v.a.r. X (discrète ou absolument continue) dont les caractéristiques E(X) et V(X) qui existent, permettent d'évaluer la probabilité pour que X diffère de E(X) d'une quantité inférieure à une valeur a, et cela sans même connaître la loi suivie par X.

Exemple d'application :

On suppose que le nombre de véhicules fabriqués/jour par un constructeur est une v.a.r. d'espérance mathématique 50 véhicules et une variabilité de la production par jour de l'ordre de 25.

- **Inégalité de Markov**

Soit X une v.a.r. d'espérance E(X) qui existe et un réel a (a > 0), l'expression de l'inégalité de Markov s'écrit :

$$P(\ X \geq a\ ) \leq E(X) / a \qquad \text{pour tout réel } a > 0$$

a) Peut-on alors estimer la probabilité que la production dépasse un jour les 75 véhicules ?

$$P(X \geq 75) \leq E(X) / 75 = 50 / 75 = 66.67\%$$

C'est un mojorant, la probabilité de produire un jour plus de 75 véhicules sera au plus égale à 66.67%.

Inégalité de Markov Bienaymé-Tchebychev

Soit X une v.a.r. d'espérance E(X) et de variance V(X) finies.

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq V(X) / k^2 \quad \text{pour tout réel } k > 0$$

Majorant

Application de l'inégalité de Markov à la variable $(X - E(X))^2$ à valeurs non négatives, avec $a = k^2$.

En effet, $P((X - E(X))^2 \geq k^2) \leq E[(X - E(X)]^2 / k^2$

comme, $(X - E(X))^2 \geq k^2 \Leftrightarrow |X - E(X)| \geq k$

On a, $P(|X - E(X)| \geq k) \leq E[(X - E(X)]^2 / k^2 = (E(X^2) - E(X)^2) / k^2 = V(X) / k^2$

Le passage à l'événement contraire, permet d'obtenir une autre expression de cette inégalité :

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq V(X) / a^2$$

$$1 - P(|X - E(X)| < a) \leq V(X) / a^2$$

$$P(|X - E(X)| < a) \geq 1 - V(X) / a^2$$

Minorant

Chapitre 5 : Approximation et convergence

Si de plus, on pose $k = t\,\sigma$ avec $t > 0$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{V(X)}$, on obtient l'expression caractéristique de l'inégalité de B-T :

$$P(\,|X - E(X)| < t\,\sigma\,) \geq 1 - 1/t^2 \quad \text{pour tout } t > 0$$

Ou encore,

$$P(\,|X - E(X)| \geq t\,\sigma\,) \leq 1/t^2 \quad \text{pour tout } t > 0$$

La probabilité pour que la v.a.r. X diffère de sa moyenne (en valeur absolue) d'au moins t fois son écart-type est, au plus égale à 1 / t².

Remarque : Une valeur de $t < 1$ est de peu d'intérêt puisque la borne inférieure de la probabilité devient alors négative.

Exemple d'application :

b) Sachant la variance de la production par jour est de l'ordre de 25, peut-on estimer la probabilité que la production journalière à venir soit comprise entre 40 et 60 véhicules ?

$P(40 < X < 60) = P(-10 < X - E(X) < 10) = P(|X-E(X)| < 10) \geq 1 - 1/t^2 = 3/4 = 75\%$

avec, $t\sigma = 10 \Rightarrow t = 10/5 = 2$

c) Si on suppose que le nombre de véhicules fabriqués par jour suit une loi normale, quelle est alors la probabilité que la production journalière à venir soit comprise entre 40 et 60 véhicules ?

Si on connaît la loi de probabilité, par exemple, $X \to N(m = 50 \;;\; \sigma^2 = 5^2)$

$P(40 < X < 60) = P(-10/5 < U < 10/5) = P(|U| < 2) = 2\Phi(2) - 1 = 2x0.9772 - 1 = 95.44\%$

Remarques :

- l'inégalité de B-T étant valable pour n'importe quelle distribution de la v.a.r. X, mais il ne faut pas s'attendre que la borne fournit soit très proche de la probabilité exacte dans la majorité des cas.
- il est évident que, si la distribution de la v.a.r. X est connue, on calcule la valeur exacte de ces probabilités.

Chapitre 5 : Approximation et convergence

➢ Théorème central limite

Appelé également théorème de la limite centrale, il est l'un des plus remarquables résultats de la théorie des probabilités. Il établit que la somme d'un grand nombre de v.a.r. indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.) suit une loi approximativement normale.

Il fournit donc non seulement une méthode simple pour le calcul approximatif de probabilités liées à des sommes ou des moyennes de v.a.r., mais il explique également ce fait empirique remarquable que bien des phénomènes naturels admettent une distribution en forme de cloche, c-à-d de type normal.

Situation : n expériences répétées, caractérisées par (X_1 ,.., X_i ,..., X_n) une suite de n v.a.r. i.i.d. de moyenne $m = E(X_i)$ et de variance $\sigma^2 = V(X_i)$ $\forall i = 1$ à n.

On note S_n la v.a.r. somme : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ alors $E(S_n) = n\,m$ et $V(S_n) = n\,\sigma^2$

$$S_n \longrightarrow N(\,n\,m\,;\,(\sigma\sqrt{n})^2\,) \quad \text{quand} \quad n \text{ est grand}$$

Ou encore, la v.a.r. centrée-réduite $U = \dfrac{S_n - E(S_n)}{V(S_n)} \longrightarrow N(0\,,\,1)$

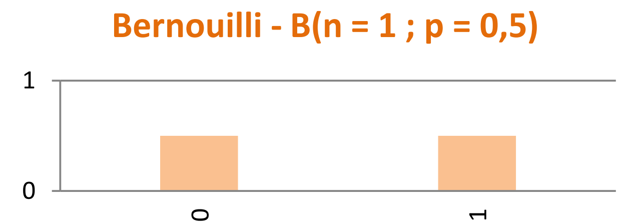
Ce qui signifie que S_n va suivre approximativement une loi normale $N(n\,m\,,\,(\sigma\sqrt{n})^2)$ lorsque n est assez grand, et cela quelle que soit la loi de probabilité suivie par les X_i .

Chapitre 5 : Approximation et convergence

Exemple d'application graphique : On lance n pièces de monnaie équilibrées, la v.a.r. S_i associée au nombre de faces pile obtenues.

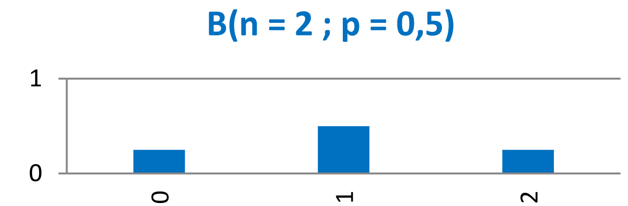
$S_1 = X_1 \rightarrow B(p=1/2)$
(jet d'une seule pièce)

k	$P(S_1 = k)$
0	1/2
1	1/2



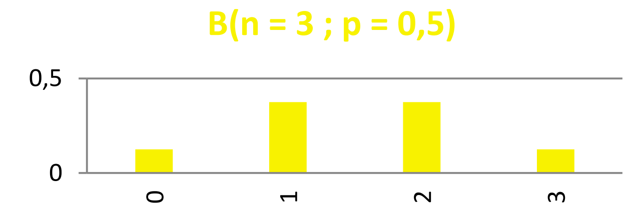
$S_2 = X_1 + X_2 \rightarrow B(n = 2 ; p=1/2)$
(jet de 2 pièces)

k	$P(S_2 = k)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4



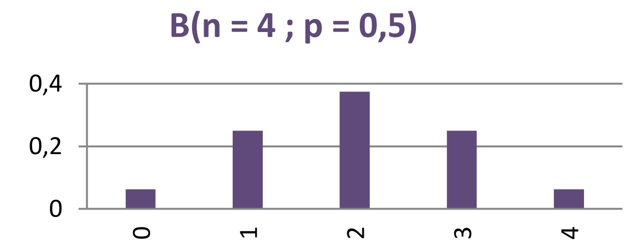
$S_3 = X_1 + X_2 + X_3 \rightarrow B(n = 3 ; p=1/2)$
(jet de 3 pièces)

k	$P(S_3 = k)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8



$S_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \rightarrow B(n = 4 ; p=1/2)$
(jet de 4 pièces)

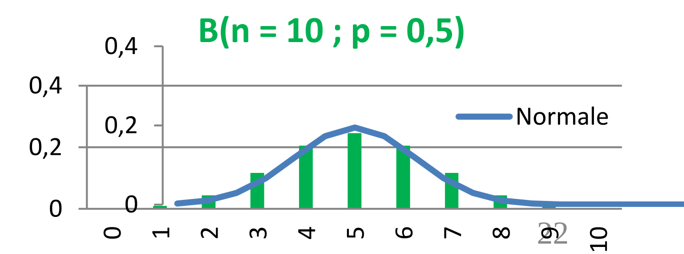
k	$P(S_4 = k)$
0	1/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16



etc…

$S_{10} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \rightarrow B(n = 10 ; p=1/2)$
(jet de 10 pièces)

k	$P(S_{10} = k)$
0	0,0010
1	0,0098
2	0,0439
3	0,1172
4	0,2051
5	0,2461
6	0,2051
7	0,1172
8	0,0439
9	0,0098
10	0,0010



- Vu que p = 1/2 (symétrie), avec n = 10, l'approximation normale est déjà satisfaisante.
- Plus n sera grand, meilleure sera l'approximation.

UFR de Sciences économiques et de Gestion

Exercices de révision

Exercice 1 :

La pratique de « l'over-booking » est très répandue et permet à une compagnie aérienne d'améliorer le taux de remplissage de ses avions : pour limiter les pertes dues aux défections, la compagnie accepte, pour un vol, plus de réservations que de places disponibles, avec le risque d'avoir, le jour du départ, des clients sans place qu'il faudra alors indemniser.

Pour compenser ce manque à gagner, la compagnie vend 9% de billets de réservation de plus que les 367 sièges disponibles.

D'après les statistiques de la compagnie, le taux d'annulation est estimé à 10%. On note par X la v.a.r. associée au nombre de personnes ayant une réservation et se présentant au guichet pour l'enregistrement le jour du départ.

a) Quelle est la loi de probabilité exacte de X ?
En déduire son espérance mathématique E(X) et sa variance V(X).

X : "Nombre d'usagers ayant une réservation et se présentant au guichet pour l'enregistrement"

Nombre de réservations pour 367 places : $n = 367 \times 109\% = 400$ réservations

Pourcentage de défection $q = 0{,}1$; $p = 1 - q = 0{,}9$; $X \to B(n = 400 ; p = 0{,}9)$

$P(X = k) = C^{k}_{400}\ 0{,}9^{k}\ 0{,}1^{400-k}$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, 400$.

$E(X) = np = 400 \times 0{,}9 = 360$ et $V(X) = npq = 360 \times 0{,}1 = 36 = 6^2$

Exercices de révision

Exercice 1 :

b) Donner une valeur approchée de la probabilité que toute personne ayant une réservation et se présentant au guichet pour l'enregistrement soit assurée d'une place pour ce vol.

Approximation d'une loi binomiale B(n ; p) par une loi normale N(0 ; 1) :

Condition d'approximation : $n = 400$ (> 30) et $np = 360$ (> 5) et $nq = 40$ (> 5 ; $q = 10\%$)

$$\left.\begin{array}{l} X \rightarrow B(\,n = 400\ ;\ p = 0{,}9\,) \\ E(X) = np = 360 \\ V(X) = npq = 6^2 \end{array}\right\} \quad X \rightarrow N(m = 360\ ;\ \sigma^2 = 6^2) \Rightarrow U = (X - 360)/6 \rightarrow N(\,0\ ;\ 1\,)$$

$$P(X \leq 367) \approx_{C.C.} P(X \leq 367 + 0{,}5) = P[(X\text{-}360)/6\ \ (367{,}5 - 360)/6\,]$$

$$= P(U\ \ 1{,}25) = \Phi(1{,}25) = 0{,}8944. \text{ cf. table } N(0;1)$$

Il y a 89,44% de chances que toute personne ayant une réservation et se présentant au guichet pour l'enregistrement soit assurée d'un siège pour ce vol.

c) Calculer la probabilité que, sur ce vol, il y ait des clients à indemniser.

$$P(X > 367) = 1 - P(X \leq 367) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056 = 10{,}56\%.$$

d) Donner une valeur approchée de la probabilité qu'un usager n'ayant aucune réservation puisse obtenir une place en se présentant au guichet d'enregistrement le jour du départ ?

$$P(X < 367) \approx_{C.C.} P(X < 367 - 0{,}5) = P[\,(X\text{-}360)/6 < (366{,}5 - 360)/6\,]$$

$$= P(U \leq 1{,}08) = \Phi(1{,}08) = 0{,}8589 \quad \text{cf. table } N(0;1)$$

Exercices de révision

Exercice de révision 1 :

e) Déterminer le nombre maximal de surréservations que doit faire la compagnie de telle sorte à assurer une place dans l'avion à 97,72% des personnes qui se présenteront au guichet d'enregistrement avec une réservation.

Approximation $p = 0{,}9$ et $q = 0{,}1$. On cherche n^* tel que $P(X \leq 367) = 0{,}9772$

$$P(X \leq 367) \approx_{C.C.} P(X \leq 367 + 0{,}5) = P[\, U \leq (367{,}5 - n^*p)/n^*pq \,] = \Phi(u) = 0{,}9772.$$

- Cf. annexe : table N(0 ; 1) ; $u = (367{,}5 - n^*p)/n^*pq = 2$

Sachant que $p = 0{,}9$ et $q = 0{,}1$, on résout l'équation :

$$(367{,}5 - 0{,}9n^*)/0{,}09n^*) = 2$$

$$(\, 367{,}5 - 0{,}9n^* \,)^2 = 4\text{x}0{,}09\, n^*$$

$$0{,}81n^{*2} - 661{,}86n^* + 367{,}5^2 = 0$$

- L'équation admet 2 solutions : $n^* = 395$ ou 422.

pour $n^* = 395 \Rightarrow u \approx 2$ et pour $n^* = 422 \Rightarrow u \approx -2$

donc $P(X \leq 367) = 0{,}9772$ pour $n^* = 395$ réservations.

Soit : $395 - 367 = 28$ surréservations.

La compagnie doit vendre 7,63% de billets de plus que les 367 places disponibles pour assurer à 97,72% une place aux usagers qui se présenteront avec une réservation au guichet pour l'enregistrement.

Exercices de révision

Exercice 2 :

Actuellement le trafic aérien (nombre d'arrivées et de départs) d'une aérogare durant une heure de pointe, est une v.a.r. normale de moyenne 50 avions et un écart-type de 15 avions.

a) Si la capacité actuelle de la piste est de 85 avions à l'heure, quelle est la probabilité que la piste soit congestionnée durant la période de pointe ?

X : "Nombre d'avions (arrivées et départs) durant une heure de pointe"

$$X \rightarrow N(\ m = 50\ ;\ \sigma^2 = 15^2\ )$$

$P(X > 85) = 1 - P(X \leq 85) = 1 - P[\ U \leq (85 - 50)/15\ ]$ cf. Table N(0 ; 1) ; $\Phi(2,33) = 0,9901$.

$= 1 - P(U \leq 2.33) = 1 - \Phi(2,33) = 1 - 0.9901 =$ 0.99%.

b) D'après les prévisions de la direction, le niveau moyen du trafic aérien devrait augmenter linéairement au taux de 10% par an du niveau moyen actuel, tout en conservant le même coefficient de variation. Si aucune autre aérogare n'est construite, quelle est la probabilité que la piste soit congestionnée durant la période de pointe dans 8 ans ?

Trafic moyen dans 8 ans : $m^* = 50 + 8 \times 50 \times 0,10 = 90$ avions

Avec un écart-type σ^* : $CV = \sigma\ /\ m = \sigma^*\ /\ m^* \Rightarrow \sigma^* = \sigma\ m^*\ /\ m = 15 \times 90\ /\ 50 = 27$ avions.

Y : trafic dans 8 ans $\quad Y \rightarrow N(\ m^* = 90\ ;\ \sigma^{*2} = 27^2\ )$

$P(\ Y > 85\ ) = 1 - P(\ Y \leq 85\ ) = 1 - P(U \leq (85 - 90)\ /\ 27\ )$

$= 1 - \Phi(-0,185) = \Phi(0,185) = 57,33\%$ cf. Table N(0,1) : $\Phi(0,185) = 0,5733$.

Exercices de révision

Exercice 2 :

c) Si les prévisions de la direction sont exactes, quelle devrait être la capacité de l'aérogare dans 8 ans pour que la probabilité de congestion durant la période de pointe soit la même que celle obtenue en a) ?

$P(Y > y) = 0{,}99\% \Rightarrow P(Y \leq y) = 0{,}9901$

$\Rightarrow P(U \leq (y - 90) / 27) = \Phi(u) = 0{,}9901 \Rightarrow u = 2{,}33$ cf. table $U \rightarrow N(0,1)$

$\Rightarrow u = (y - 90) / 27 = 2{,}33 \Rightarrow y = 90 + 27 \times 2{,}33 \approx 153$ avions.

Exercices de révision

Exercice 3 :

Soit T une v.a.r. associée à la durée de vie d'un certain type d'appareil. T est distribuée selon une loi Exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) de fonction densité de probabilité f définie par :

$$T \rightarrow Exp(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

d'espérance mathématique $E(T) = 1/\lambda$ et de variance $V(T) = 1/\lambda^2$.

a) Déterminer la fonction taux de panne, notée $\lambda(t)$, définie par l'équation :

$\lambda(t) = f(t) / (1 - F(t))$ où, F désigne la fonction de répartition de T.

fonction taux de panne : $\lambda(t) = f(t) / [1 - F(t)]$

$= \lambda e^{-\lambda t} / [1 - (1 - e^{-\lambda t})] = \lambda$ fonction constante.

C'est la raison pour laquelle le paramètre λ est souvent appelé le taux d'une distribution exponentielle.

b) Déterminer, en fonction de λ, la médiane t_0 de la v.a.r. T telle que :

$$P(T > t_0) = P(T \leq t_0) = 0{,}5 .$$

Médiane de la v.a.r. X :

$$P(T \leq t_0) = P(T > t_0) = F(t_0) = 1 - e^{-\lambda t_0} = 0{,}5$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda t_0} = 0{,}5 \Rightarrow -\lambda t_0 = \ln(1/2) \Rightarrow t_0 = \ln(2) / \lambda.$$

Exercices de révision

Exercice 3 :

Soit Y une variable aléatoire réelle qui suit une loi dite de Weibull de fonction de répartition G définie par :

$$G(y) = \begin{cases} 1 - e^{-(y-1)/2} & \text{si } y > 1 \\ 0 & \text{si } y \leq 1. \end{cases}$$

c) Déterminer H la fonction de répartition de la v.a.r. $Z = (Y - 1)/2$.

$$H(z) = P(Z \leq z) = P((Y-1)/2 \leq z) = P(Y \leq 2z + 1) = G(2z + 1)$$

$$H(z) = G(2z + 1) = \begin{cases} 1 - e^{-z} & \text{si } 2z + 1 > 1 \Rightarrow z > 0 \\ 0 & \text{si } 2z + 1 \leq 1 \Rightarrow z \leq 0. \end{cases}$$

$$H(z) = \begin{cases} 1- e^{-z} & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z \leq 0. \end{cases}$$

d) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable Z, en déduire son espérance mathématique E(Z) et sa variance V(Z).

Reconnaître la loi de probabilité suivie par la v.a.r. Z : l'expression de la fonction de répartition de Z est celle d'une distribution exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

On en déduit : $E(Z) = 1/\lambda = 1$ et $V(Z) = 1/\lambda^2 = 1$.