Université Lumière Lyon 2 — UFR de Sciences Économiques et de Gestion

Université de Lyon

Licence $3^{ème}$ année - Economie & Gestion

STATISTIQUE & PROBABILITES

Travaux dirigés

Exercices d'application avec indications de solutions & Tables statistiques

Année Universitaire 2025-2026

Rafik Abdesselam

Courriel - rafik.abdesselam@univ-lyon2.fr

Web - http://perso.univ-lyon2.fr/∼rabdesse/fr/

Matériel pédagogique - http://perso.univ-lyon2.fr/∼rabdesse/Documents/

UFR de Sciences Économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

Sommaire

Objectif du cours

Faire réaliser qu'en fin de compte, la théorie des probabilités n'est tout simplement que le bon sens réduit à du calcul. Les questions pratiques de la vie courante ne sont en réalité, pour l'essentiel, que des problèmes de probabilité.

Volume Horaire : 20h CM - Cours Magistral & 13h TD - Travaux Dirigés
Code de l'enseignement : 35EAAC01 - UE Statistique & Probabilités
Crédits ECTS - Licence Economie Gestion

• **Pré-requis :** L2-S4 Statistique descriptive.
• **Approche pédagogique :** 7 séances de cours magistraux (Mercredi 8h - 11h - Amphi - durée 3h), 7 séances de travaux dirigés (durée 2h - salle de TD). 2 épreuves écrites - Contrôles Continus, samedi matin.
• **Plateforme - Matériel pédagogique :** Polycopiés - Support de cours & Travaux dirigés avec indications de correction - Support de Travaux dirigés supplémentaire - Problèmes de révision - Tests d'Auto-Evaluation avec corrigés - Sujets et Corrigés de Contrôles Continus et d'Examens Terminaux des trois dernières années - Aide mémoire des lois de probabilité courantes & Tables statistiques

• **Modalités de Contrôle des Connaissances :** 2 Contrôles Continus en TD ($50\% - 50\%$) - durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Un 3ème contrôle continu est prévu en cas d'absence justifiée à un des deux contrôles continus.

Quelques références bibliographiques - Probabilités

[1] R. Abdesselam "Statistique et probabilités. Exercices d'application et problèmes corrigés avec rappels de cours. La collection Références sciences, Editions Ellipses, 2020.

[2] J-P. Lecoutre "Statistique et probabilités - Cours et exercices corrigés", Dunod, Collection Éco Sup, 2012 (5ème édition).

[3] B. Grais "Méthodes statistiques" Modules Économiques, Dunod, Collection Éco Sup, 2003 (3ème édition).

[4] Y. Herbert "Mathématiques probabilités et statistique" Vuibert.

[5] Sheldon Y. Ross "Initiation aux probabilités" Traduction de la 4ème Edition Américaine Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

[6] J.R. Reau G. Chauvat "Probabilités et statistiques" Flash pour les sciences économiques et sociales. Armand Colin.

[7] P. Roger "Probabilités, statistique et processus stochastiques" Cours et exercices. Collection synthex, Pearson Education.

[8] G.R. Grimmett and D.R. Stirzaker "Probability and Random Processes" Oxford Science Publications.

[9] B. Tribout "Statistique pour économistes et gestionnaires" Pearson Education.

UFR de Sciences Économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

Fiche A - TD 1 : Chapitre 1 - DENOMBREMENT & ANALYSE COMBINATOIRE

Exercice 1 : Montrer les propriétés suivantes :

1) $\forall n, p \in N^*, \quad A_{n+1}^{p+1} = (n+1)\, A_n^p$
2) $\forall n \in N,\ 0 \leq p \leq n, \quad C_n^p = \frac{n}{p}\, C_{n-1}^{p-1} \quad ; \quad C_n^p = C_n^{n-p}$ et $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Exercice 2 : Tirage au sort des groupes de la phase finale de la coupe du monde de football. Une urne contient 32 boules contenant chacune le nom d'un pays qualifié dont 8 boules sont des pays têtes de série. Déterminer dans chacun des cas suivants, le nombre de tirages possibles d'un groupe composé de 4 pays :

1) tirage simultané (un seul tirage : on ne tient pas compte de l'ordre et sans remise) des 4 boules.
2) tirage simultané d'une boule parmi les têtes de série et de 3 boules parmi les non têtes de série.
3) tirages successifs (on tient compte de l'ordre) sans remise des 4 boules.
4) tirages successifs avec remise des 4 boules.

Exercice 3 : Avec un jeu de 32 cartes, combien peut-on constituer de mains de 6 cartes différentes formées de 3 cartes noires, de 3 cartes de Coeur mais sans aucun As ?

Exercice 4 : Le responsable du service des personnels d'une usine doit constituer, pour assurer une permanence, une équipe composée de 3 Surveillants et de 2 Ouvriers d'entretien. Il dispose de 4 Surveillants et de 5 Ouvriers d'entretien.

1) De combien de façons différentes peut-il constituer cette équipe ?

2) Sachant qu'il doit éviter de placer dans la même équipe le surveillant S_1 et l'ouvrier O_1. Entre combien d'équipes différemment constituées peut-il choisir ?

Exercice 5 : Combien de signaux différents, chaque signal étant constitué de 8 pavillons alignés verticalement, peut-on former à partir d'un ensemble de 4 pavillons rouges indiscernables, 3 pavillons blancs indiscernables et un pavillon bleu ?

Exercice 6 : Lors de l'arbre de Noël d'une école maternelle, chacun des vingt-cinq enfants d'une classe doit choisir un cadeau parmi trente types de cadeaux possibles.

Afin de passer la commande correspondante, la maîtresse enregistre les choix des enfants en constituant une liste où figure en face de chaque nom le type de cadeau souhaité.

1) Combien y a-t-il de listes possibles dans chacun des deux cas qui suivent:

cas a) : il n'y a qu'un cadeau de chaque type qui soit disponible, aussi deux enfants ne peuvent-ils choisir le même type de cadeau ?

cas b) : le nombre de cadeaux de chaque type n'est pas limité ?

2) Vu du côté du fournisseur, qui lui ne s'intéresse qu'aux quantités, combien y a-t-il de commandes possibles, dans chacun des deux cas qui précèdent ?

Exercice 7 : Chacun des quatre boulangers d'un quartier doit choisir un jour hebdomadaire de fermeture qui lui conviendrait.

1) De combien de façons différentes peuvent a priori s'énoncer les choix possibles des quatre boulangers ?

Certains boulangers ayant choisi le même jour de fermeture, ce qui ne peut être accepté pour le quartier, on leur demande de modifier éventuellement leur choix afin que les quatre jours choisis soient différents.

2) Quel est alors a priori le nombre de façons différentes d'énoncer les choix possibles des quatre boulangers ?

3) On s'aperçoit qu'aucun boulanger ne veut fermer le samedi , pas plus que le dimanche. Quel est alors a priori le nombre de façons différentes d'énoncer les choix possibles des quatre boulangers ?

*************** ••• ***************

*** ***Indications et résultats - Fiche A : TD 1 : Chapitre 1 - Dénombrement - Analyse Combinatoire*** ***

Exercice 1 : Propriétés à déduire à partir des définitions.

Exercice 2 : 1) 35 960   2) 16 192   3) 863 040   4) 1048 576

Exercice 3 : 12 740

Exercice 4 : 1) 40 équipes différentes 2) 28 équipes différentes sans le couple (S_1, O_1).

Exercice 5 : 280 signaux différents.

Exercice 6 : 1a) $2.2104\,10^{30}$ listes , 1b) $8.4729\,10^{36}$ listes , 2a) 142 506 listes , 2b) $1.6832\,10^{15}$ listes.

Exercice 7 : 1) 2401   2) 840   3) 120.

*************** ••• ***************

UFR de Sciences Économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2 | Université de Lyon

Fiche B - TD 2 : Chapitre 2 - CALCUL DES PROBABILITES

Exercice 1 : Soit Ω un ensemble. A et B désignent deux sous-ensembles de Ω. Donner une interprétation algébrique des événements suivants, dont on fera les diagrammes de Venn :

1) A est réalisé mais pas B. 2) A ou B se réalisent mais pas en même temps.

3) A ou non B se réalisent. 4) ni A ni B ne se réalisent.

Exercice 2 : Soient A et B deux événements de l'ensemble fondamental Ω, tels que :

$P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ et $P(A \cup B) = \frac{23}{60}$.

1) Calculer les probabilités : $P(A/B)$, $P(\overline{A}/B)$, $P(A \cap B/B)$, $P(A \cap \overline{B}/B)$, $P[(A \cup B)/(A \cap \overline{B})]$.

2) Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Sont-ils indépendants en probabilité ?

Exercice 3 : A la sortie d'une chaine de fabrication, les produits sont susceptibles de présenter deux défauts. Un très grand nombre d'observations a permis d'établir que :

- La proportion de produits fabriqués ayant le défaut A est de 5% ;
- La proportion de produits fabriqués ayant le défaut B est de 3% ;
- La proportion de produits fabriqués ayant les deux défauts est de 1%. Déterminer la probabilité qu'un produit présente :

1) Le défaut A ou le défaut B. 2) Le défaut A seulement. 3) Aucun défaut.

Exercice 4 : Un libraire reçoit un carton de 50 livres différents dont 3 sont dédicacés par l'auteur. On tire au hasard 10 livres du carton.

Déterminer la probabilité des événements suivants, on obtient,

A : "Les 3 livres dédicacés" ; B : "Un seul livre dédicacé" ; C : "Au moins un livre dédicacé".

Exercice 5 : La production d'un bien en très grand nombre est assurée par trois usines U1, U2 et U3 qui fabriquent respectivement 30%, 30% et 40% du total. Les proportions de biens produits défectueux sont respectivement 4%, 3% et 2%.

Quelle est la probabilité qu'un bien choisi au hasard et dont on constate qu'il est défectueux provienne de l'usine U1 ? De l'usine U2 ? De l'usine U3 ?

Exercice 6 : Dans un lot de pièces fabriquées, il y a 2% de pièces défectueuses. On contrôle les pièces mais le mécanisme est aléatoire :

- Si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 96%.

- Si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 98%. Déterminer les probabilités des événements suivants :

1) il y a une erreur dans le contrôle.
2) d'accepter une pièce.
3) la pièce est mauvaise sachant qu'elle est acceptée.
4) la pièce est bonne sachant qu'elle est refusée.

Exercice 7 : Le Salon Mondial de l'Automobile a présenté 40 nouvelles petites voitures citadines-polyvalentes selon trois types de carburant : 16 Electriques, 10 Diesel et 14 à Essence. Dans 10% des cas une voiture diesel est de marque française, dans 70% des cas une voitue électrique n'est pas de marque française et dans 20% des cas, une voiture à essence est de marque française. On choisi au hasard une voiture pour l'exposer au public en présence du constructeur.

1) Quelle est la probabilité que la voiture choisie soit diesel et de marque étrangère ?
2) Quelle est la probabilité que la voiture choisie soit une voiture de marque française ?
3) Quelle est la probabilité que la voiture française choisit soit électrique ?
4) Quelle est la probabilité que la voiture étrangère choisie soit à essence ?
5) Quelle est la probabilité que la voiture étrangère choisie ne soit pas électrique ?

Exercice 8 : Soient A et B deux événements non vides tels que $P(A) = \frac{1}{3}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$

Calculer en **justifiant votre réponse**, les probabilités $P(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants :

1) A et B sont des événements indépendants en probabilité.
2) L'événement A est inclus dans l'événement B.
3) A et B sont des événements incompatibles.
4) La probabilité $P(A/B) = \frac{1}{2}$.

*************** ••• ***************

UFR de Sciences Économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

*** ***Indications et résultats - Fiche B : TD 2 - Chapitre 2 - Calcul des probabilités*** ***

Exercice 1 : 1) $A \cap \overline{B} = A - B$, 2) $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \triangle B$, 3) $A \cup \overline{B}$, 4) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

Exercice 2 : a) $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$; 0 ; 1 b) compatibles et dépendants.

Exercice 3 : 1) 7% , 2) 4% , 3) 93%

Exercice 4 : 1) $0,6\%$, 2) 39.80% , 3) 49.60%.

Exercice 5 : 1) U_1 : 41.38% ; U_2 : 31.03% ; U_3 : 27.59%.

Exercice 6 : 1) $3,96\%$, 2) $94,12\%$, 3) $0,042\%$, 4) $66,67\%$

Exercice 7 : 1) 22.50% 2) 21.50% 3) 55.81% 4) 35.67% 5) 64.33%.

Exercice 8 : 1) 66.67% 2) 50% 3) 83.33% 4) 58.33%.

*************** ••• ***************

UFR de Sciences Économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

Fiche C - TD 3 et 4 : Chapitre 3 - LOI DE PROBABILITE

***** *Variables aléatoires réelles discrètes et continues* *****

Exercice 1 : Un garagiste loue des voitures à la journée. Soit X la variable aléatoire réelle associée au "nombre de voitures demandées dans une journée" dont la probabilité est donnée par :

x_i	0	1	2	3	4	5	6^+
$p_i = P(X = x_i)$	p_0	0,15	0,27	0,23	0,16	p_5	0,04

1) Sachant que $p_5 = 2p_0$, compléter puis représenter la distribution de probabilité de X.

2) Définir puis représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

3) Déterminer la probabilité que le garage ait moins de trois demandes dans la journée.

4) Calculer E(X), le nombre moyen de voitures demandées par jour, et l'écart-type $\sigma(X)$.

En supposant que le garagiste dispose le matin de trois voitures, déterminer les probabilités des événements suivants :

5) toutes les voitures ont été louées dans la journée,

6) le garagiste n'a pu satisfaire toutes les demandes.

Exercice 2 : Soit f la fonction densité de probabilité définie par :

$$\text{f(x)} = \begin{cases} a + bx^2 & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Déterminer a et b sachant que $E(X) = 3/5$.

Exercice 3 : Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour densité de probabilité :

$$\text{f(x)} = \begin{cases} ke^{-(x-1)/2} & si\ x > 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1) Calculer l'unique valeur que l'on peut attribuer à la constante k pour que f soit la fonction densité de probabilité de la variable aléatoire réelle X dite loi de Weibull.

2) Déterminer F la fonction de répartition de X.

3) Calculer les probabilités suivantes :

$P(X > 2)$; $P(1 < X \leq 2)$; $P[(X \leq 1) \cup (X > 2)]$; $P_{(X \geq 2)}(X \leq 2) = P[(X \leq 2)/(X \geq 2)]$.

4) Déterminer la valeur x_0 telle que $P(X \leq x_0) = 50\%$? Que représente x_0 ?

5) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire réelle X.

6) En déduire l'espérance mathématique $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de la v.a.r. $Y = \frac{X-1}{2}$.

7) Déterminer G la fonction de répartition de Y. En déduire sa fonction densité de probabilité g.

Exercice 4 :

Soient les fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}xe^{-x/2} & si\ x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} k(1-y^2) & si\ -1 < y < 1 \\ 0 & sinon \end{cases} \quad h(z) = \begin{cases} \frac{5}{z^2} & si\ z > 5 \\ 0 & si\ z \leq 5 \end{cases}$$

1) Vérifier que les fonctions suivantes sont bien des fonctions densités de probabilité.
2) Déterminer l'espérance mathématique de chacune des variables aléatoires.

Exercice 5 : Soit la variable aléatoire réelle Y admettant une densité de probabilité g définie par :

$$g(y) = \begin{cases} A(4-y) & si\ 0 < y < 4 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) Déterminer la valeur réelle du coefficient A pour que g soit bien une densité de probabilité.
2) Construire la courbe représentative de g.
3) Déterminer puis représenter la fonction de répartition G de Y.
4) Calculer les probabilités suivantes: $P(Y < -1)$; $P(Y \leq 2)$; $P(2 \leq Y \leq 3)$; $P(Y \geq 2)$; $P[(Y < 2) \cup (Y > 3)]$; $P(Y \geq 4)$; $P_{Y>2}(Y > 3)$.
5) Calculer, si possible, l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de Y.

Exercice 6 : Dans un aérodrome, la durée du processus d'atterrissage d'un avion, mesurée en minutes, est associée à une variable aléatoire réelle, notée T, qui suit une loi de probabilité dont la fonction densité f est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t} & si\ t > 0\ et\ \lambda > 0 \\ o & sinon \end{cases}$$

1) Vérifier que f est bien une fonction densité de probabilité.
2) Calculer E(T) , V(T) et $\sigma(T)$ si possible.
3) Pour la suite on suppera que $E(T) = 2$
   a) En déduire λ. Construire la courbe de f de T.
   b) Construire la courbe de la fonction de répartition F de T.
4) Déterminer les probabilités des événements : $\{T > 2\}$; $\{1 < T < 3\}$; $\{1 < T < 3/T < 4\}$.

Exercice 7 : Soit F la fonction de répartition associée à une v.a.r. X, définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si\ x < -1 \\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & si\ -1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

1) Calculer les probabilités suivantes : $P(X > \frac{1}{2})$; $P(\mid X \mid \leq \frac{1}{2}))$.
2) Déterminer la fonction densité de probabilité f de X.
3) Calculer E(X) et V(X). Pouvait-on prévoir $E(X) = 0$?
4) Calculer la probabilité $P(\mid X \mid > a)$ pour $a = 1, a = \frac{1}{2}$ et $a = 0$.

Exercice 8 : Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} + k & si\ 0 \le x \le 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1) Pour quelle valeur unique de k, f est-elle effectivement une densité de probabilité ?

2) Déterminer puis représenter graphiquement la fonction de répartition de X. En déduire la probabilité : $P(1 < X \le 2)$.

3) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.

4) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle $Y = \frac{X+1}{12}$.

Exercice 9 : Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 0 \\ 1 - (2x+1)e^{-2x} & si\ x\ \ge\ 0 \end{cases}$$

1) Calculer les probabilités suivantes :

$P(X > 2)$; $P(1 < X \le 2)$; $P[(X > 1)/(X < 2)]$; $P[(X > 1) - (X < 2)]$

2) Déterminer la fonction f de densité de probabilité de X.

3) Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X.

4) Déterminer le mode de X.

5) On note Y la variable aléatoire réelle telle que $Y = e^{-2X}$, calculer la probabilité : $P(Y \le \frac{1}{2})$

*************** ••• ***************

∗∗∗ Indications et résultats - Fiche C : TD 3 et 4 - Chapitre 3 - Lois de probabilité (discrètes et continues) ∗∗∗

Exercice 1 : 1) $0,05$; $0,10$ 3) $P(X < 3) = 0,47$ 4) $2,76$; $1,477$ 5) $P(X \geq 3) = 0,53$ 6) $P(X > 3) = 0,3$

Exercice 2 : $a = \frac{3}{5}$ et $b = \frac{6}{5}$

Exercice 3 : 1) $k = \frac{1}{2}$ 2) $F(x) = 0$ si $x \leq 1$; $F(x) = 1 - e^{-(x-1)/2}$ si $x > 1$
3) 60.65% ; 39.35% ; 60.65% ; 0% 4) 2.39 (médiane)
5) $E(X) = 3$; $V(X) = 2^2$; $\sigma(X) = 2$. 6) $E(Y) = V(Y) = 1$.
7) $G(y) = 1 - e^{-y}$ si $y > 0$; G(y) = 0 sinon. $g(y) = e^{-y}$ si $y > 0$; g(y) = 0 sinon. On reconnait l'expression de la fonction densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$: $Y \rightarrow Exp(\lambda = 1)$.

Exercice 4 : 1) Vérifier : $\begin{cases} \forall x \in R \;\; f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$, 2a) $E(X) = 4$ 1b) $k = \frac{3}{4}$ 2b) $E(Y) = 0$ 2c) $E(Z)$ n'existe pas.

Exercice 5 : 1) $A = \frac{1}{8}$, 3) $G(y) = P(Y \leq y) = 0$ si $y < 0$, $G(y) = \frac{y}{2} - \frac{y^2}{16}$ si $0 < y < 4$, $G(y) = 1$ si $y \geq 4$,
4) a) 0% b) 75% c) 18.75% d) 25% e) 81.25% f) 0% g) 25%. 5) $E(Y) = \frac{4}{3}$; $V(Y) = \frac{8}{9}$; $\sigma_Y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Exercice 6 : 1) Vérifier (Intégration par parties) : $\begin{cases} \forall t \in R \;\; f(t) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \end{cases}$, 2) $E(T) = \frac{2}{\lambda}$, $V(T) = \frac{2}{\lambda^2}$, $\sigma(T) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$

3) a) $\lambda = 1$ b) $F(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leq 0 \\ 1 - (t+1)e^{-t} & si\ t > 0 \end{cases}$

4) 40.60% , 53.66% , 59.07%.

Exercice 7 : 1) $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{4}$ 2) $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < -1\ ou\ x > 1 \\ x+1 & si\ -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & si\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

3) $E(X) = 0$; $V(X) = \frac{1}{6}$, oui car f est une fonction paire f(-x) = f(x) :
4) $P(|X| > a) = 1 - P(|X| \leq a) = 1 - P(-a \leq X \leq a) = 1 - F(a) + F(-a)$.

$$P(|X| > a) = \begin{cases} 0 & si\ a = 1 \\ \frac{1}{4} & si\ a = \frac{1}{2} \\ 1 & si\ a = 0 \end{cases}$$

Exercice 8 : 1) $k = \frac{1}{12}$ 2) $F(x) = 0$ si $x \leq 0$; $F(x) = \frac{x(x+1)}{12}$ si $0 < x \leq 3$; $F(x) = 1$ si $x > 3$; $\frac{1}{3}$
3) $E(X) = 1.875$; $V(X) = 0.61$
4) $G(y) = 0$ si $y \leq \frac{1}{12}$; G(y) = y(12y - 1) si $\frac{1}{12} < y \leq \frac{1}{3}$; $G(y) = 1$ si $y > \frac{1}{3}$
ou bien $g(y) = 24y - 1$ si $\frac{1}{12} < y \leq \frac{1}{3}$; $g(y) = 0$ ailleurs.

Exercice 9 : 1) 9.16% , 31.44% , 34.61% , 9.16%

2) f(x) $= \begin{cases} 0 & si\ \ x < 0 \\ 4xe^{-2x} & si\ x\ \geq\ 0 \end{cases}$

3) 1 , 0.5 4) 0.5 5) 84.66% avec $G(y) = \begin{cases} 0 & si\ \ y < 0 \\ (1 - lny)y & si\ \ 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & si\ \ y > 1 \end{cases}$

*************** ••• ***************

UFR de Sciences Économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

Fiche D - TD 5 et 6 : Chapitre 4 - LOIS DE PROBABILITES COURANTES

******** Variables aléatoires réelles discrètes ********

Exercice 1 : Une pièce de monnaie équilibrée est lancée cinquante fois de suite. On décide de compter les apparitions du côté pile de la pièce.

1) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle X associée au "nombre d'apparitions du côté pile de la pièce au cours des cinquante lancés"?

2) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 succés "côté pile" ?

Exercice 2 : Cinq fusées sont lancées en même temps, sachant qu'une fusée atteint la cible avec une probabilité $p = 0.60$.

1) Quelle est la probabilité pour que la cible ne soit pas atteinte ?

2) Quelle est la probabilité pour que la cible soit atteinte 2 fois ? Au moins une fois ?

3) Combien de fusées faudrait-il lancer pour avoir une probabilité d'au moins 99.99% d'atteindre la cible au moins une fois ?

4) Quelle est la probabilité pour que la cible ne soit pas atteinte 4 fois au cours des cinq lancés ?

Exercice 3 : Cinq étudiants décident de partir ensemble pour un séjour. Pour assurer le ravitaillement du groupe, il leur faut choisir parmi le groupe , la ou les différentes personnes qui vont assumer les 12 ravitaillements journaliers de leur séjour. Kevin fait partie du groupe mais il apprécie très modérément la marche jusqu'à la station la plus proche pour le ravitaillement.

1) Quelle est la loi de la variable aléatoire réelle X associée au "nombre de ravitaillements journaliers effectués par Kevin lors du séjour" ?

2) Quelle est la probabilité pour que Kevin effectue k ravitaillements lors du séjour ?

3) Quelles sont les valeurs de l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart-type de X ?

4) Quelle est la probabilité pour que Kevin n'aille pas au ravitaillement lors du séjour ?

5) Quelle est la probabilité pour que Kevin aille au ravitaillement une seule fois lors du séjour ? Plus de 2 fois lors du séjour ? Moins de 10 fois lors du séjour ? Plus de 2 fois mais moins de 5 fois lors du séjour ?

Kevin a longuement cogité afin de proposer une autre procédure pour les ravitaillements. Il se demande s'il ne serait pas plus avantageux (pour lui !!!) de proposer d'effectuer 4 gros ravitaillements soit un tous les trois jours. Il suggére d'effectuer les quatre tirages au sort, un seul nom à la fois, sans remise.

6) Reconnaitre la loi de la variable aléatoire réelle Y associée au "nombre de ravitaillements effectués par Kevin lors du séjour"

7) Quelle est la probabilité pour que Kevin effectue k ravitaillements lors du séjour ?

8) Quelles sont les valeurs de l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart-type de Y ?

9) Quelle est la probabilité pour que Kevin n'aille pas au ravitaillement lors du séjour ?

10) Quelle est la probabilité pour que Kevin aille au ravitaillement une seule fois lors du séjour ? Plus de 2 fois lors du séjour ? Moins de 10 fois lors du séjour ? Plus de 2 fois mais moins de 10 fois lors du séjour ?

Exercice 4 : Dans un atelier de mécanique, le nombre X d'accidents du travail hebdomadaire suit une loi de Poisson de moyenne 2.

1) Caractériser la distribution de probabilité de X.

2) Calculer la probabilité de l'événement : "il y a eu au moins un accident au cours d'une semaine".

3) Calculer la probabilité de l'événement : "il y a eu exactement un accident sachant qu'il y en a eu au moins un".

4) Calculer la probabilité de l'événement : "il y a eu au moins trois accidents au cours d'une semaine donnée".

5) Calculer la probabilité de l'événement " il y a eu exactement trois accidents sachant qu'il y en a eu au moins deux ".

Exercice 5 : Une entreprise fabrique des tubes de verre. D'après le responsable la proportion de tubes défectueux est de 5%. On note X la v.a.r. associée au "nombre de tubes de verre contrôlés pour observer un tube défectueux".

1) Déterminer la loi de X, calculer E(X) et V(X).

2) Quelle est la probabilité pour que le 4ème tube contrôlé s'avère le premier défectueux ?

3) Même question, mais cette fois pour le 10ème tube contrôlé ?

Exercice 6 : L'entreprise de micro-ordinateurs MBI précise que 80% de ses micro-ordinateurs ne requièrent aucun ajustement avant d'être expédiés aux diverses sucursales qu'elle dessert.

1) Quelle est la probabilité qu'il faille en examiner 6 pour en obtenir 3 qui ne requièrent aucun ajustement ?

2) En moyenne, combien de micro-ordinateurs faut-il vérifier avant d'en obtenir 10 qui ne requièrent aucun ajustement ?

Exercice 7 : Dans une entreprise, un contrôle visuel est effectué sur des plaques de laiton. La surface d'une plaque est vérifiée pour détecter des taches de cuivre, d'oxydation ou autres non-conformités apparentes. Selon les résultats du contrôle effectué par un agent technique du Département Assurance Qualité, il y a, en moyenne, $1,7$ non-conformité par plaque. On suppose que le nombre de non-conformités par plaque est distribué selon une loi de Poisson.

1) Quelle est la variabilité du nombre de non-conformités ?

2) Quelle est la probabilité d'observer moins de 2 non-conformités par plaque ? Plus d'une non-conformité par plaque ? Entre 2 et 3 non-conformités par plaque ?

3) Une plaque est commercialisée si elle ne présente aucune non-conformité. Sur 150 plaques contrôlées, quel serait vraisemblablement le nombre de plaques commercialisables ; ne présentant aucune non-conformité ?

***** *Variables aléatoires réelles continues* *****

Exercice 8 : Soit X une v.a.r. qui suit une loi Uniforme sur l'intervalle $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

1) Ecrire puis représenter la fonction densité de probabilité f de X. En déduire puis représenter la fonction de répartition F de X.

2) Déterminer les caractéristiques : E(X), V(X) et $\sigma(X)$ de X.

3) Calculer les probabilités suivantes : $P(X \leq -2)$; $P(X = \frac{1}{4})$; $P(-0,2 \leq X \leq 0,2)$
$P(X \geq 0,2)$; $P(X \leq +1)$; $P[(X \geq 0,2) \cup (X \leq -0,2)]$

Exercice 9 : Soit X une v.a.r. qui suit une loi exponentielle d'espérance mathématique E(X) = 3.

1) Ecrire puis représenter la fonction densité de probabilité f de X. En déduire puis représenter la fonction de répartition F de X.

2) Déterminer les caractéristiques : E(X), V(X) et $\sigma(X)$ de X.

3) Calculer les probabilités suivantes : $P(X \leq -8)$; $P(X \leq 8)$; $P(-2 \leq X \leq 2)$
$P[(X \geq -2) \cup (X \leq -2)]$; $P(X \geq 3)$; $P[(X \geq 2) \cup (X \leq -2)]$
$P(\mid X + 1 \mid \geq 3)$; $P(\mid X - 2 \mid \leq 5)$; $P(-1 < X < 3)$

Exercice 10 : Soit X une variable aléatoire normale de paramètres $m = -1$ et $\sigma^2 = 4$ (lecture de la table de la loi normale cf. annexe)

1) Calculer les probabilités suivantes : $P[X < -1]$, $P[X < 1]$, $P[-3 < X < 1]$.

2) Déterminer le fractile x_0 tel que : $P[X \leq x_0] = 0,90$, $P[X \leq x_0] = 0,33$,
$P[X > -x_0] = 0,40$, $P[\mid X + 1 \mid \leq x_0] = 0,70$

3) Déterminer les paramètres m et σ de la loi normale suivie par Y, sachant que :
$P[Y < 2] = 9.12\%$ et $P[Y > 5] = 25.25\%$.

4) Déterminer l'espérance mathématique E(Z) = m de la loi normale suivie par Z, sachant que $V(Z) = 2^2$ et $P(Z > 3) = 93.32\%$

5) Déterminer la variance mathématique $V(T) = \sigma^2$ de la loi normale suivie par T, sachant que $E(T) = -1.5$ et $P(T < -0.8) = 75.80\%$

Exercice 11 : Une étude statistique auprès d'un magasin de bricolage a permis d'établir, que la demande de location de petites machines industrielles est distribuée normalement avec une moyenne 200 unités par mois et un écart-type de 30 unités.

1) Si l'entreprise a en stock, pour le mois qui débute, 230 unités, quelle est la probabilité qu'elle ne puisse suffire à la demande ?

2) L'entreprise veut s'assurer qu'elle ne sera pas en pénurie de stock à 95% et plus au cours d'un mois donné. Quel doit être le nombre de machines à stocker mensuellement pour respecter cette condition ?

Exercice 12 : On suppose que la durée de vie, en jours, d'une ampoule, est une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{100}$.

1) Quelle est la durée de vie moyenne d'une ampoule ?

2) Quelle est la probabilité qu'une ampoule choisie au hasard fonctionne encore au moins 10 jours, sachant qu'à son $n^{ième}$ jour, elle fonctionnait encore ?

Exercice 13 : Un fabricant a constaté que la durée de vie en années de ses lave-vaisselles est une v.a.r. sensiblement normale, de moyenne 7 et d'écart-type 2.

1) Sachant que la garantie est de 2 ans, calculer la proportion de lave-vaisselles que le fabricant doit s'attendre à remplacer. En déduire le nombre correspondant sur 100 000 ventes.

2) Le même fabricant envisage de doubler la durée de garantie, pour la porter à 4 ans. Par quel coefficient le nombre de lave-vaisselles à remplacer est-il multiplié ?

3) Construire l'intervalle symétrique en probabilité dans lequel fluctue la durée de vie dans 80% des cas, puis dans 95% des cas.

Exercice 14 :

Le cours en €uros de l'action de La Française des jeux, titre FDJ coté en bourse Euronext Paris en mars 2020, est supposé suivre une loi log-normale de paramètres $\mu = 3.50$ et d'écart-type $\sigma = 0.25$.

1) Etablir l'expression de la fonction de répartition du cours du titre FDJ.

2) Quelle est la probabilité que le cours de l'action soit inférieur à 28.5 € ? Compris entre 28.5 et 32 € ? Supérieur à 32 € ?

3) Déterminer la valeur du titre telle que la probabilité pour que le cours du titre soit inférieur à celle valeur, soit supérieure à 95%.

Exercice 15 : Le responsable du SAV Service après-vente d'un grand magasin de gros électroménager a estimé que le temps (en heures) nécessaire pour réparer une machine suit une loi exponentielle de durée de réparation moyenne de 2 heures.

1) Quelle est la probabilité que le temps de réparation d'une machine n'excède pas 2 heures ? Soit de plus de 2h ? Compris entre 2h et 4h ?

2) Quelle est la probabilité que la durée de réparation d'une machine soit d'au moins 4 heures sachant qu'elle a déjà dépassée 2 heures ?

Exercice 16 : Une entreprise lyonnaise fabrique des semi-conducteurs, dédiés à l'automobile. Le semi-conducteur passe par une chaine d'Assemblage puis par une chaine de Contrôle. Le temps de passage exprimé en minutes (mn), d'un semi-conducteur sur la chaine d'Assemblage est associé à une variable aléatoire réelle, notée A, qui suit une loi exponentielle d'espérance mathématique $E(A) = 5$. Le temps de passage sur la chaine de Contrôle est associé à une variable aléatoire réelle notée C, qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[1; 3]$.

Les variables aléatoires réelles A et C sont indépendantes.

Quelle est la probabilité qu'un semi-conducteur :

1) passe entre 2 et 4 mns sur la chaine d'Assemblage ?

2) passe plus de 2 mns sur la chaine de Contrôle ?

3) passe plus de 3 mns sur la chaine d'Assemblage et moins de 2 mns sur la chaine de Contrôle ?

On note S la variable aléatoire réelle représentant le temps total de fabrication d'un semi-conducteur.

4) Exprimer S en fonction de A et C puis déterminer le temps moyen de fabrication d'un semi-conducteur par cette entreprise.

Exercice 17 : La capacité des ascenseurs est déterminée à partir de la masse d'une personne qui suit une loi normale de moyenne $m = 75$ kg et d'écart-type $\sigma = 5$ kg. Dans un ascenseur d'un immeuble, le nombre maximum de personnes est de 9. Un voyant lumineux rouge s'affiche lorsqu'il y a surpoids pour une masse supérieure à 700 kg, dans ce cas l'ascenseur ne démarre pas. Le poids de chaque personne est supposé indépendant du poids des autres personnes présentes dans l'ascenseur.

1) Quelle est la probabilité d'avoir un poids inférieur à 670 kg quand un groupe de 9 personnes monte dans l'ascenseur ? Compris entre 670 et 700 kg ? Plus de 670 kg sachant qu'il est inférieur à 700 kg ?

2) Dans moins de 5% des cas, le poids du groupe de 9 personnes dans l'ascenseur sera inférieur ou égal à quelle valeur ?

3) Calculer la probabilité qu'il y ait surpoids, quand un groupe de 9 personnes monte dans l'ascenseur.

*************** ••• ***************

$***$ ***Indications et résultats - Fiche D - TD 5 et 6 : Chapitre 4 - Lois de probabilité courantes*** $***$

******** Variables aléatoires réelles discrètes ********

Exercice 1 : 1) Loi dite Binomiale : $P(X=k) = \frac{50!}{(50-k)!k!} 0.5^k (1-0.5)^{50-k}$ pour tout k = 0, 1, ... 50. 2) $P(X=2) \simeq 0$

Exercice 2 : 1) 1.02% 2) 23.04% 98.98% 3) $n^* \geq 11$ fusées.
4) $P_{0.4}[Y=4] = P_{0.6}(X=n-4] = P_{0.6}[X=1] = 7.68\%,\ n=5, p=60\%$ et $q=40\%$.

Exercice 3 : 1) X $\rightarrow B(n=12; p=0.20)$, 2) $P(X=k) = C_{12}^k 0.2^k 0.8^{12-k}$ pour $k=0,1,...,12$
3) $E(X) = np = 2.4$, $V(X) = npq = 1.92$ 4) $P(X=0) = 6.9\%$,
5) $P(X=1) = 20.6\%$, $P(X>2) = 44.17\%$, $P(X<10) \approx 100\%$, $P(2<X<5) = 36.91\%$.
6) Y $\rightarrow H(N=5; n=4; p=0.20)$, 7) $P(Y=k) = \frac{C_1^k C_4^{4-k}}{C_5^4}$ pour $k=0,1$
8) $E(Y) = np = 0.8$, $V(Y) = npq(\frac{N-n}{N-1}) = 0.16$ 9) $P(Y=0) = 20\%$,
10) $P(Y=1) = 80\%$, $P(Y>2) = 0\%$, $P(Y<10) = 100\%$, $P(2<Y<10) = 0\%$.

Exercice 4 : 1) X $\rightarrow P(\lambda=2)$, $P(X=k) = e^{-2}\frac{2^k}{k!}$ pour $k \in N$ $E(X) = V(X) = \lambda = 2$ 2) $P(X \geq 1) = 86.47\%$
3) $P[(X=1)/(X \geq 1)] = 31.31\%$, 4) $P(R \geq 3) = 32.33\%$, 5) $P[(X=3)/(X \geq 2)] = 30.38\%$.

Exercice 5 : 1) Loi exacte : Géométrique $G(p=0.05)$; $E(X) = \frac{1}{p} = 20$ et $V(X) = \frac{q}{p^2} = 380$, 2) 0.0429 3) 0.0315

Exercice 6 : 1) 4.1% ; 2) 12.5 micros.

Exercice 7 : 1) 1,7 2) $49,32\%$ $50,67\%$ $41,36\%$ 3) $27,40 \simeq 28$ plaques.

******** Variables aléatoires réelles continues ********

Exercice 8 : 1) $f(x) = 2$ si $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$, $f(x) = 0$ ailleurs , $F(x) = 0$ si $x < -\frac{1}{4}$, $F(x) = 2x + \frac{1}{2}$ si $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$
$F(x) = 1$ si $x > \frac{1}{4}$. 2) $E(X) = 0$, $V(X) = \frac{1}{48}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{12}$, 3) 0% , 0% , 80% , 10% , 100% , 20% .

Exercice 9 : 1) $E(X) = 3 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ $f(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ ailleurs , $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{3}}$ si $x \geq 0$,
$F(x) = 0$ si $x < 0$ 2) $V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 9 \Rightarrow \sigma(X) = 3$,
3) 0% , 93.05% , 48.66% , 100% , 36.78% , 51.34% , 51.34% , 90.30% , 63.21%.

Exercice 10 : 1) 50% , 84.13% , 68.26% 2) 1.56 , -1.88 , 0.49 , 2.07
3) m = 4 et $\sigma = 1.5$
4) E(Z) = m = 6 et $V(T) = \sigma^2 = 1$

Exercice 11 : 1) $15,87\%$ 2) $n \geq 250$ unités.

Exercice 12 : 1) E(X) = 100 jours 2) $e^{-1/10} = 90.48\%$

Exercice 13 : 1) 0.62%, 621 produits. 2) 10.76 3) dans 80% : [4.43 ; 9.57] , dans 95% : [3.08 ; 10.92].

Exercice 14 : 1) $G(y) = F(lny)$ si $y > 0$ et $G(y) = 0$ ailleurs. G et F les fonctions de répartion de Y et de
$X = ln(Y) \rightarrow N(m_x = 3.50\ ;\ \sigma_x^2 = 0.25^2)$ 2) 27.41% ; 17.14% ; 55.45% 3) > 49.96 €.

Exercice 15 : 1) 63.21% ; 36.21% ; 23.25% 2) 36.79%
Exercice 16 : 1) 22.10% 2) 50% 3) 27.44% 4) 7 mn.
Exercice 17 : 1) 36.94% , 58.28% , 61.21% 2) 650.33 kg 3) 4.78%

*************** ••• ***************

UFR de Sciences Économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

Fiche E - TD 7 : Chapitre 5 - APPROXIMATIONS ET CONVERGENCE

Exercice 1 : A la sortie d'une chaîne de montage, 97% des véhicules testés ne présentent aucun défaut. Quelle est la probabilité pour que dans un lot de 50 véhicules pris au hasard, 5 exactement soient défectueux, en appliquant :

1) la distribution de probabilité exacte,

2) Une distribution approchée.

Exercice 2 : Recherche d'approximations. Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi Hypergéométrique $H(N = 1000\,;\, n = 50\,;\, p)$

1) Par quelle(s) lois peut-on approcher la loi de X lorsque $p = 0,5$?

2) Par quelle(s) lois peut-on approcher la loi de X lorsque $p = 0,05$?

Exercice 3 : Une société de location de voitures a calculé que la probabilité qu'une de ses voitures louées ait un accident dans une journée est de l'ordre de 4%. La probabilité qu'une voiture louées ait plus d'un accident par jour est supposée nulle. Les accidents sont supposés indépendants les uns des autres. Chaque jour, 100 voitures de la société sont en circulation. Soit X la variable aléatoire réelle associée au nombre de voitures de location de la société ayant un accident dans une journée.

1) Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer E(X) et V(X).

2) Montrer que la loi de X peut être approchée par une loi de probabilité discrète.

3) A l'aide de cette approximation, calculer la probabilité des événements suivants :

- le nombre d'accidents en une journée est égal à 4,
- le nombre d'accidents en une journée est au plus égal à 5 sachant qu'il est au moins égal à 2.

4) A l'aide de cette approximation, déterminer le plus petit entier n tel que $P(X > n) \leq 1\%$.

Exercice 4 : Un restaurant peut servir 75 repas. La pratique montre que 20% des clients ayant réservé ne viennent pas. Le restaurateur accepte 90 réservations.

1) Quelle est la probabilité qu'il se présente au plus 70 clients ?

2) Quelle est la probabilité de ne pas satisfaire la clientèle ?

3) Combien le restaurateur doit-il accepter de réservations pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 95% de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront dans son restaurant ?

Exercice 5 : Deux restaurants se disputent la clientèle constituée par les 576 employés d'une entreprise. En supposant que chaque employé a autant de chances de choisir un restaurant que l'autre, combien de repas journaliers doit prévoir chacun des 2 restaurants pour pouvoir satisfaire la demande dans plus de 98% des cas ?

Exercice 6 : Une chaîne de fabrication produit des pièces d'un même type en très grand nombre. La probabilité pour qu'une pièce fabriquée soit défectueuse est de l'ordre de 6%. On prélève 300 pièces successivement, une à une, avec remise. Soit X la v.a.r. associée au "nombre de pièces défectueuses à mettre au rebut parmi cet échantillon".

1) Déterminer la loi de probabilité exacte de X ainsi que ses paramètres. Calculer E(X) et V(X).
2) Calculer la probabilité qu'il y ait 25 pièces défectueuses dans l'échantillon.
3) Justifier une approximation à la loi de probabilité de X et calculer ses paramètres.
4) Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 20 pièces défectueuses dans l'échantillon.
5) Calculer la probabilité qu'il y ait moins de 25 pièces et plus de 15 pièces défectueuses.

Exercice 7 : Le nombre de clients qui entrent dans un magasin pour audiophiles un jour j est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 12. On admet que les variables correspondant à des jours différents sont indépendantes.

Quelle est la probabilité d'avoir au moins 250 clients durant un mois de 22 jours ouvrables ?

Exercice 8 : Dans l'amphithéâtre Lucie Aubrac réservé au cours magistral de Statistique & Probabilités de la $2^{ème}$ année de licence de Sciences Economiques & Gestion de l'Université Lumière Lyon 2, le nombre maximum de places assises s'élève à 220. La nouvelle promotion compte 360 étudiant(e)s.

On a constaté expérimentalement que seulement 60% des étudiants sont présents pour suivre le cours magistral.

1) Quelle est la probabilité d'avoir à dédoubler le cours de Statistique & Probabilités ?

2) Quelle est la probabilité d'avoir exactement 220 étudiant(e)s assis dans l'amphitéâtre pour suivre le cours magistral ?

*************** ••• ***************

UFR de Sciences Économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

*** ***Indications et résultats - Fiche E : TD 7 - Chapitre 5 - Approximations et convergence*** ***

Exercice 1 : 1) Loi binomiale : 1.31% 2) Loi de Poisson : 1.41%

Exercice 2 : $H(1000; 50; 0,5) \simeq B(50; 0,5) \simeq N(25; \sqrt{12.5})$ 2) $H(1000; 50; 0,05) \simeq B(50; 0,05) \simeq P(\lambda = 2.5)$.

Exercice 3 : 1) $B(n = 100, p = 0.04)$; $E(X) = 4$; $V(X) = 3.84$
2) Poisson $\lambda = 4$ Vérifier les conditions d'approximation ($n = 100 \geq 30; np = 4 < 5; p = 4\% < 10\%$).
3) $19,54\%$; $76,35\%$ 4) $n \geq 9$.

Exercice 4 : 1) 34.61% 2) 17.79% 3) $n* \leq 86$ réservations.
La garantie tombe en défaut si le nombre X de transistors défectueux dans le paquet est au moins égal à 3.
$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 8.03\%$

Exercice 5 : Pour satisfaire la demande dans au moins 98% des cas, il faut préparer au moins 313 repas.

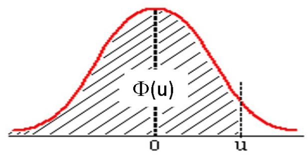
Exercice 6 : 1) X $\rightarrow B(n = 300, p = 0.06)$, $E(X) = np = 18$, $V(X) = npq = 16.92 = 4.11^2$ 2) 2.26%
3) Approximation par une loi normale : conditions ($n = 300 \geq 30$, $np = 18 \geq 15$, $nq = 282 > 15$) ,
$X \hookrightarrow N(m = 18, \sigma^2 = 16.92 = 4.11^2)$ 4) $72,85\%$ 5) 67.16%.

Exercice 7 : 81.3%.

Exercice 8 : 1) 31.41% 2) 3.91%

*************** ••• ***************

Table de la loi Normale Centrée & Réduite : $U \to N(0\ ;\ 1)$



Fonction de répartition Φ : $\quad \Phi(u) = P(U \leq u) \quad ; \quad \Phi(-u) = P(U \leq -u) = 1 - \Phi(u)$

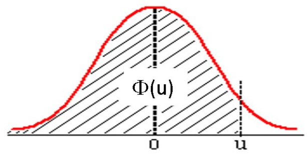
u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	**0.89617**	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900

Exemples : $\Phi(1.26) = P(U \leq 1.26) = 0.89617 = 89.62\%$

$\Phi(u) = P(U \leq u) = 97.50\% \Rightarrow u = 1.96$

*************** ••• ***************

Table des fractiles de la loi Normale $U \to N(0\ ;\ 1)$



Pour $P < 0.5$: sens de lecture $\downarrow \to$ les fractiles sont négatifs. Exemple : $P = 0,4020 = \Phi(u) = P(U \leq u) \Rightarrow u = -0,2482$

P	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	
0	infini	3,0902	2,8782	2,7478	2,6521	2,5758	2,5121	2,4573	2,4089	2,3656	2,3263	0,99
0,01	2,3263	2,2904	2,2571	2,2262	2,1973	2,1701	2,1444	2,1201	2,0969	2,0749	2,0537	0,98
0,02	2,0537	2,0335	2,0141	1,9954	1,9774	1,9600	1,9431	1,9268	1,9110	1,8957	1,8808	0,97
0,03	1,8808	1,8663	1,8522	1,8384	1,8250	1,8119	1,7991	1,7866	1,7744	1,7624	1,7507	0,96
0,04	1,7507	1,7392	1,7279	1,7169	1,7060	1,6954	1,6849	1,6747	1,6646	1,6546	1,6449	0,95
0,05	1,6449	1,6352	1,6258	1,6164	1,6072	1,5982	1,5893	1,5805	1,5718	1,5632	1,5548	0,94
0,06	1,5548	1,5464	1,5382	1,5301	1,5220	1,5141	1,5063	1,4985	1,4909	1,4833	1,4758	0,93
0,07	1,4758	1,4684	1,4611	1,4538	1,4466	1,4395	1,4325	1,4255	1,4187	1,4118	1,4051	0,92
0,08	1,4051	1,3984	1,3917	1,3852	1,3787	1,3722	1,3658	1,3595	1,3532	1,3469	1,3408	0,91
0,09	1,3408	1,3346	1,3285	1,3225	1,3165	1,3106	1,3047	1,2988	1,2930	1,2873	1,2816	0,90
0,10	1,2816	1,2759	1,2702	1,2646	1,2591	1,2536	1,2481	1,2426	1,2372	1,2319	1,2265	0,89
0,11	1,2265	1,2212	1,2160	1,2107	1,2055	1,2004	1,1952	1,1901	1,1850	1,1800	1,1750	0,88
0,12	1,1750	1,1700	1,1650	1,1601	1,1552	1,1503	1,1455	1,1407	1,1359	1,1311	1,1264	0,87
0,13	1,1264	1,1217	1,1170	1,1123	1,1077	1,1031	1,0985	1,0939	1,0893	1,0848	1,0803	0,86
0,14	1,0803	1,0758	1,0714	1,0669	1,0625	1,0581	1,0537	1,0494	1,0450	1,0407	1,0364	0,85
0,15	1,0364	1,0322	1,0279	1,0237	1,0194	1,0152	1,0110	1,0069	1,0027	0,9986	0,9945	0,84
0,16	0,9945	0,9904	0,9863	0,9822	0,9782	0,9741	0,9701	0,9661	0,9621	0,9581	0,9542	0,83
0,17	0,9542	0,9502	0,9463	0,9424	0,9385	0,9346	0,9307	0,9269	0,9230	0,9192	0,9154	0,82
0,18	0,9154	0,9116	0,9078	0,9040	0,9002	0,8965	0,8927	0,8890	0,8853	0,8816	0,8779	0,81
0,19	0,8779	0,8742	0,8705	0,8669	0,8633	0,8596	0,8560	0,8524	0,8488	0,8452	0,8416	0,80
0,20	0,8416	0,8381	0,8345	0,8310	0,8274	0,8239	0,8204	0,8169	0,8134	0,8099	0,8064	0,79
0,21	0,8064	0,8030	0,7995	0,7961	0,7926	0,7892	0,7858	0,7824	0,7790	0,7756	0,7722	0,78
0,22	0,7722	0,7688	0,7655	0,7621	0,7588	0,7554	0,7521	0,7488	0,7454	0,7421	0,7388	0,77
0,23	0,7388	0,7356	0,7323	0,7290	0,7257	0,7225	0,7192	0,7160	0,7128	0,7095	0,7063	0,76
0,24	0,7063	0,7031	0,6999	0,6967	0,6935	0,6903	0,6871	0,6840	0,6808	0,6776	0,6745	0,75
0,25	0,6745	0,6713	0,6682	0,6651	0,6620	0,6588	0,6557	0,6526	0,6495	0,6464	0,6433	0,74
0,26	0,6433	0,6403	0,6372	0,6341	0,6311	0,6280	0,6250	0,6219	0,6189	0,6158	0,6128	0,73
0,27	0,6128	0,6098	0,6068	0,6038	0,6008	0,5978	0,5948	0,5918	0,5888	0,5858	0,5828	0,72
0,28	0,5828	0,5799	0,5769	0,5740	0,5710	0,5681	0,5651	0,5622	0,5592	0,5563	0,5534	0,71
0,29	0,5534	0,5505	0,5476	0,5446	0,5417	0,5388	0,5359	0,5330	0,5302	0,5273	0,5244	0,70
0,30	0,5244	0,5215	0,5187	0,5158	0,5129	0,5101	0,5072	0,5044	0,5015	0,4987	0,4959	0,69
0,31	0,4959	0,4930	0,4902	0,4874	0,4845	0,4817	0,4789	0,4761	0,4733	0,4705	0,4677	0,68
0,32	0,4677	0,4649	0,4621	0,4593	0,4565	0,4538	0,4510	0,4482	0,4454	0,4427	0,4399	0,67
0,33	0,4399	0,4372	0,4344	0,4316	0,4289	0,4261	0,4234	0,4207	0,4179	0,4152	0,4125	0,66
0,34	0,4125	0,4097	0,4070	0,4043	0,4016	0,3989	0,3961	0,3934	0,3907	0,3880	0,3853	0,65
0,35	0,3853	0,3826	0,3799	0,3772	0,3745	0,3719	0,3692	0,3665	0,3638	0,3611	0,3585	0,64
0,36	0,3585	0,3558	0,3531	0,3505	0,3478	0,3451	**0,3425**	0,3398	0,3372	0,3345	0,3319	0,63
0,37	0,3319	0,3292	0,3266	0,3239	0,3213	0,3186	0,3160	0,3134	0,3107	0,3081	0,3055	0,62
0,38	0,3055	0,3029	0,3002	0,2976	0,2950	0,2924	0,2898	0,2871	0,2845	0,2819	0,2793	0,61
0,39	0,2793	0,2767	0,2741	0,2715	0,2689	0,2663	0,2637	0,2611	0,2585	0,2559	0,2533	0,60
0,40	0,2533	0,2508	**0,2482**	0,2456	0,2430	0,2404	0,2378	0,2353	0,2327	0,2301	0,2275	0,59
0,41	0,2275	0,2250	0,2224	0,2198	0,2173	0,2147	0,2121	0,2096	0,2070	0,2045	0,2019	0,58
0,42	0,2019	0,1993	0,1968	0,1942	0,1917	0,1891	0,1866	0,1840	0,1815	0,1789	0,1764	0,57
0,43	0,1764	0,1738	0,1713	0,1687	0,1662	0,1637	0,1611	0,1586	0,1560	0,1535	0,1510	0,56
0,44	0,1510	0,1484	0,1459	0,1434	0,1408	0,1383	0,1358	0,1332	0,1307	0,1282	0,1257	0,55
0,45	0,1257	0,1231	0,1206	0,1181	0,1156	0,1130	0,1105	0,1080	0,1055	0,1030	0,1004	0,54
0,46	0,1004	0,0979	0,0954	0,0929	0,0904	0,0878	0,0853	0,0828	0,0803	0,0778	0,0753	0,53
0,47	0,0753	0,0728	0,0702	0,0677	0,0652	0,0627	0,0602	0,0577	0,0552	0,0527	0,0502	0,52
0,48	0,0502	0,0476	0,0451	0,0426	0,0401	0,0376	0,0351	0,0326	0,0301	0,0276	0,0251	0,51
0,49	0,0251	0,0226	0,0201	0,0175	0,0150	0,0125	0,0100	0,0075	0,0050	0,0025	0,0000	0,50
	0,01	0,009	0,008	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001	0	P

Pour $P > 0.5$: sens de lecture $\to \uparrow$ les fractiles sont positifs. Exemple : $P = 0,6340 = \Phi(u) = P(U \leq u) \Rightarrow u = +0,3425$

*************** ••• ***************