UFR de sciences économiques et de gestion

LICENCE $3^{ème}$ ANNEE - ECONOMIE & GESTION

L3-S5 : STATISTIQUE ET PROBABILITES

Travaux dirigés supplémentaires avec indications et résultats

Année Universitaire 2024-2025

Rafik Abdesselam

Courriel - rafik.abdesselam@univ-lyon2.fr

Web - http://perso.univ-lyon2.fr/∼rabdesse/fr/

Matériel pédagogique - http://perso.univ-lyon2.fr/∼rabdesse/Documents/

UFR de Sciences Économiques et de Gestion — Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

Fiche A : DENOMBREMENT & ANALYSE COMBINATOIRE

Exercice 1 : Montrer les propriétés suivantes :

1) $\forall a, b \in R, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k \, b^{n-k}$ ***(formule du binôme de Newton)***

2) $\forall n, k \in N,\ k < n \quad (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, C_n^k \, x^k$ et $\quad 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$

Exercice 2 : On considère un jeu de 52 cartes. Une main est un groupement de 13 cartes différentes choisies au hasard dans le jeu de 52 cartes.

1) Combien y-a-t-il de mains distintes ?

2) Combien peut-on constituer de mains comprenant deux As ?

Exercice 3 : Un investisseur a 20 mille euros à placer sur trois affaires potentielles. Chaque investissement doit être un nombre entier en milliers d'euros. Et il existe un engagement minimum pour chaque affaire qui sont respectivement 2, 3 et 4 mille euros. Combien de stratégies d'investissement y a-t-il :

1) si un investissement doit être fait sur chaque affaire ?

2) si deux des trois affaires doivent être couvertes ?

Exercice 4 : Six étudiants occupent la même table ronde d'un restaurant universitaire.

1) De combien de manières peuvent-ils s'assoir :

a) si les chaises sont numérotées ? b) si les chaises ne sont pas numérotées ?

2) On suppose qu'il y a en fait autant d'étudiants que d'étudiantes. De combien de manières ces étudiant(e)s peuvent-ils s'assoir en respectant l'alternance :

a) si les chaises sont numérotées ? b) si les chaises ne sont pas numérotées ?

Exercice 5 : Un championnat sportif groupe vingt équipes. Chaque match oppose deux équipes. On procède à des matchs allers et des matchs retours.

Combien de matchs faut-il organiser au total, pour respecter le règlement ?

Exercice 6 : Dans une Faculté, une association d'étudiants comprend 78 étudiantes de $1^{ère}$ année, 87 étudiants de $1^{ère}$ année, 41 étudiantes de $2^{ème}$ année, 37 étudiants de $2^{ème}$ année.

1) De combien de manières peut-on former le bureau de cette association qui doit comporter 8 étudiant(e)s de $1^{ère}$ année et 6 de $2^{ème}$ année.

2) De combien de manières peut-on former ce bureau si l'on désire respecter la parité des sexes pour chaque année ?

Exercice 7 : Une association comprend vingt membres dont douze hommes et huit femmes. Elle veut former un comité de cinq personnes dans lequel doivent se trouver au moins deux hommes et deux femmes. Calculer le nombre de façons de former ce comité dans chacun des cas suivants :

1) Chaque membre de l'association accepte de faire partie du comité.
2) Deux des hommes refusent d'en faire partie.
3) Mr Patrick et Mme Germaine refusent de sièger ensemble.

Exercice 8 : Un digicode à l'entrée d'un immeuble est composé de 9 touches : 3 lettres $\{A, B, C\}$ et 6 chiffres $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Le code d'entrée doit comporter une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres.

1) Combien de codes d'entrée différents peut-on former ?
2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?
6) Combien y a-t-il de codes comportant trois chiffres identiques ?

Exercice 9 : Une troupe de théatre amateur, composée de quatorze femmes et de dix hommes, veut préparer une représentation. Dans la pièce du répertoire classique choisie, il y a dix rôles féminins et cinq masculins.

1) Combien peut-on imaginer de distributions des rôles ?
2) Combien y a-t-il de distributions dans lesquelles joue Madeleine B., qui est l'une des femmes de la troupe ?

*************** ••• ***************

UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2 — UFR DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION

UNIVERSITÉ DE LYON

$\ast\ast\ast$ ***Indications et résultats - Fiche A : Dénombrement - Analyse Combinatoire*** $\ast\ast\ast$

Exercice 1 : Propriétés à déduire à partir des définitions.

Exercice 2 : 1) $6.3501\ 10^{11}$ 2) $6 \times 22\,595\,200\,368 = 1.3557\,10^{11}$

Exercice 3 : 1) $\mathfrak{C}_3^{11} = 78$ stratégies 2) $\mathfrak{C}_2^{15} + \mathfrak{C}_2^{14} + \mathfrak{C}_2^{13} = 45$ stratégies.

Exercice 4 : 1a) $P_6 = 720$ 1b) $\frac{P_6}{6} = P_5 = 120$ 2a) $2P_3P_3 = 72$ 2b) $\frac{2P_3P_3}{6} = 12$

Exercice 5 : 380 matchs. **Exercice 6 :** 1) $2.9457\ 10^{21}$ 2) $2.63\ 10^{20}$

Exercice 7 : 1) 9856 comités , 2) 5880 , 3) 9240

Exercice 8 : 1) 648 2) 375 3) 273 4) 360 5) 288 6) 18.

Exercice 9 : 1) $A_{14}^{10}A_{10}^{5} = 1.098\,10^{14}$ 2) $A_{10}^{1}A_{13}^{9}A_{10}^{5} = 7.846\,10^{13}$

*************** ••• ***************

Fiche B : CALCUL DES PROBABILITES

Exercice 1 : On prend au hasard 2 dominos dans un jeu complet de dominos. Calculer la probabilité pour qu'ils soient **"compatibles"**.

Exercice 2 : Dans un jeu de 32 cartes, on choisit au hasard 4 cartes par tirages simultanés d'une carte à chaque fois sans remise. Déterminer les probabilités des événements suivants :

1) l'une des cartes au moins est un as.
2) les 4 cartes sont de la même couleur d'atout.
3) il n'y a pas 2 cartes ayant la même valeur.
4) les 4 cartes ont des couleurs différentes et des valeurs différentes.
5) les 4 cartes ont des couleurs différentes ou des valeurs différentes.

Exercice 3 : Vous lancez 2 dés honnêtes à 6 faces mais l'un est rouge et l'autre vert.

1) Calculer la probabilité pour que, en lançant une seule fois les 2 dés, vous obteniez la réalisation de l'événement "au moins un des 2 dés donne un nombre pair".

2) Calculer la probabilité pour que, en lançant 10 fois les 2 dés, vous obteniez la réalisation de l'événement "au moins un double 5".

Exercice 4 : Considérons quatre groupes A, B, C, D d'étudiants. Dans chaque groupe, les proportions d'étudiants ayant fait des études supérieures de sciences économiques sont respectivement 5%, 10%, 25% et 40%. On choisit au hasard un de ces groupes, puis on choisit un étudiant dans ce groupe.

1) Calculer la probabilité pour que l'étudiant choisi ait effectué des études supérieures de sciences économiques.

2) L'étudiant ayant effectué des études supérieures de sciences économiques, calculer la probabilité pour qu'elle appartienne au groupe C.

Exercice 5 : Montrer que :

Si deux événements A et B sont indépendants en probabilité, alors :

1) Les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants en probabilité. Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants en probabilité. Les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants en probabilité.

2) $P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A})$.

3) Si l'événement C est indépendant en probabilité de A et de B, est-il aussi indépendant en probabilité de $A \cup B$?

4) Si l'événement $\overline{C}$ est indépendant en probabilité de A et de B, est-il aussi indépendant en probabilité de $A \cap B$?

*************** ••• ***************

Exercice 6 : A la sortie d'une chaîne de montage d'automobiles, chaque véhicule subit deux types de contrôle de défauts. L'un visuel sur toute la Carrosserie du véhicule et l'autre plus technique relatif au Moteur du véhicule. On désigne par C l'événement : le véhicule a un défaut de carrosserie et par M l'événement : le véhicule a un défaut moteur. Une étude sur un grand nombre de véhicules sortis de cette chaîne de montage a montré que 10% des véhicules présente un défaut de carrosserie et 15% un défaut moteur. La probabilité qu'un véhicule soit validé sans aucun des deux défauts pour la commercialisation est de l'ordre de 80%. On prélève au hasard un véhicule dans la production.

Quelle est la probabilité que ce véhicule présente un défaut pour,

1) au moins un des deux contrôles carrosserie ou moteur ?

2) les deux contrôles carrosserie et moteur ?

3) un seul des deux contrôles ?

4) le contrôle carrosserie, sachant qu'il présente un défaut pour le contrôle moteur ?

5) Les évènements défaut de carrosserie et défaut moteur sont-ils incompatibles ? Indépendants en probabilité ?

Exercice 7 : Soit A, B et C désignent trois sous-ensembles de Ω et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans Ω. Montrer les égalités suivantes :

1) $\overline{A} \cap (A \cup B) = \overline{A} \cap B = B - A$

2) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$

3) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

4) $A \cup (B - [A \cap B]) \cup (C - [A \cap C]) = A \cup B \cup C$

Exercice 8 : Dans une entreprise, on compte une population 45% d'hommes et 55% de femmes. Un homme sur trois est syndiqué et une femme sur cinq est syndiquée.

Quelle est la probabilité qu'une personne syndiquée soit une femme ?

Exercice 9 : Cinq étudiantes sont bien embarassées. Elles n'ont eu qu'une seule place pour le concert tant convoité. Elles décident de sélectionner la chanceuse à partir d'un jeu de 32 cartes totalement classique. Chacune leur tour, elles choisiront une carte parmi les 32 du jeu jusqu'à ce que l'une d'entre elles obtienne l'as de coeur et le billet !

Paméla se propose de battre le jeu de cartes afin de bien les mélanger. Ses copines supposent a priori que Paméla a autant de chances d'être honnête que d'être une tricheuse. De plus, une tricheuse tire à coup sûr l'as de coeur ! Paméla a le droit d'effectuer le premier tirage et elle obtient immédiatement l'as de coeur. Ses copines se demandent si Paméla est une tricheuse. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 10 : Une usine comporte 3 machines M_1, M_2, M_3. Les pannes de ces machines sont indépendantes et de probabilités respectives $5\%, 3\%, 1\%$. L'usine est stoppée dès que l'une au moins des machines tombe en panne.

1) Calculer la probabilité que l'usine soit stoppée.

2) Sachant que l'on a stoppée l'usine, calculer la probabilité pour que la machine M_1 soit tombée en panne.

Exercice 11 : Il existe deux types de tests pour casser les chaînes de tranmission du virus Covid-19 et maîtriser l'évolution de l'épidémie. Un test Virologique (V) qui permet de déterminer si une personne est porteuse du virus au moment du test grâce à un prélèvement par voie nasale. Un test Sérologique (S) qui permet de rechercher si une personne a développé une réaction immunitaire après avoir été en contact avec le virus. Ce test détecte la présence d'anticorps au moyen d'une prise de sang. Pendant la période de confinement, on a utilisé conjointement les deux types de tests sur un grand nombre de personnes. Leurs probabilités d'être positif sont respectivement de 60% et 65%. La probabilité que le test S soit positif sachant que le test V est positif est de 99.50%.

1) Quelle est la probabilité d'avoir les deux tests positifs en même temps ?
2) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un des deux tests négatif ?
3) Quelle est la probabilité d'avoir les deux tests négatifs en même temps ?
4) Quelle est la probabilité d'avoir le test V positif sachant que le test S est positif ?
5) Quelle est la probabilité d'avoir le test V positif sachant que le test S est négatif ?

*************** ••• ***************

UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2 — UFR DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION

UNIVERSITÉ DE LYON

$***$ ***Indications et résultats - Fiche B : Calcul des probabilités*** $***$

Exercice 1 : 756 cas possibles équiprobables , $42 + 252 = 294$ cas favorables , $\frac{294}{756} = 38.89\%$

Exercice 2 : 1) 43.06% 2) 0.78% 3) 49.83% 4) 4.67% 5) 56.55% .

Exercice 3 : 1) 75% 2) 24.55%.

Exercice 4 : 1) 20% , 2) 31.25%
et A : "l'As de Coeur est tiré au sort" Il y a en effet 97% de chances pour que Paméla soit une tricheuse.

Exercice 5 : 1) et 2) Oui (cf.cours) 3) Non en général, Il faudrait que les événements A, B et C soient mutuellement indépendants. 4) Non, il faudrait que C soit indépendant de $A \cap B$.

Exercice 6 : 1) 20% 2) 5% 3) 15% 4) 33.33% 5) Compatibles et dépendants.

Exercice 7 : Expressions à déduire à partir des définitions.

Exercice 8 : $42,30\%$

Exercice 9 : Il y a 96.97% de chances pour que Paméla soit une tricheuse.

Exercice 10 : 1) 8.77% 2) 57.01%.

Exercice 11 : 1) 59.70% ; 2) 40.30% ; 3) 34.70% ; 4) 91.85% ; 5) 0.86%

*************** ••• ***************

UFR DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION — UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2 | UNIVERSITÉ DE LYON

Fiche C : VARIABLES ALEATOIRES REELLES NON USUELLES

***** *Variables aléatoires réelles discrètes* *****

Exercice 1 : Soit une urne contenant 5 boules numérotées respectivement 1, 1, 3, 3, 4 mais indiscernables au toucher. On effectue un tirage simultané de 2 boules au hasard dans l'urne. Soit S la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus.

1) Trouver la loi de probabilité de S.
2) Déterminer puis représenter graphiquement la loi fonction de répartion F de la variable S.
3) Calculer si possible E(S) et V(S).

***** *Variables aléatoires réelles continues* *****

Exercice 2 : Si la densité de probabilité d'une variable aléatoire X est définie par :

$$\text{f(x)} = \begin{cases} k(3 - x^2) & si\ 0 \leq x \leq \sqrt{3} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1) Déterminer la valeur de la constante k pour que f soit une fonction de densité de probabilité.
2) Déterminer la fonction de répartition F.
3) Déterminer les probabilités suivantes : $P(X \leq 1)$; $P(X > 0,5)$; $P(0,5 < X \leq 1)$
4) Calculer E(X) et V(X).

Exercice 3 : La proportion de paces occupées en soirée, dans un complexe cinématographique, est considérée comme une variable aléatoire réelle continue, notée X, pour laquelle il a été établi que :

$$\mathrm{F(x)} = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ \frac{x^2}{5}(9-4x) & si\ 0 < x < 1 \\ 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

1) Déterminer la fonction densité de probabilité de cette proportion, et en déduire le mode que l'on interprétera.

2) Tracer les diagrammes associés à la loi proposée.

3) Calculer l'espérance de cette proportion, et carctériser la dispersion autour de celle-ci.

4) Ecrire l'équation que vérifie la proportion médiane.

5) Calculer la probabilité ω pour qu'il y ait entre 60% et 90% de paces occupées.

6) Calculer la probabilité pour que pendant deux jours de suite, moins de la moitié des places soit occupée chaque jour, en supposant l'indépendance des taux d'occupation d'un jour sur l'autre.

7) Un modèle plus souple serait :

$$\mathrm{F(x)} = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ ax^2 - bx^3 & si\ 0 < x < 1 \\ 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

A quelles conditions, sur les réels a et b, s'agit-il bien d'une fonction de répartition ?

Exercice 4 : La proportion X de places occupées dans un amphithéatre lors d'un cycle de conférences est une variable aléatoire continue de fonction de répartition :

$$\mathrm{F(x)} = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ -x^2 + bx + c & si\ 0 < x < 1 \\ 1 & si\ 1 \leq x \end{cases}$$

1) Trouver l'univers $\Omega(X)$ des valeurs de X.

2) Déterminer les valeurs de b et c à partir de l'étude de la continuité de F en 0 et en 1. Construire la représentation graphique de F.

3) Déterminer la densité de probabilité f de la variable X

4) Construire la représentation graphique de la fonction densité de probabilité f de X.

5) Calculer l'espérance mathématique E(X), la variance V(X) et l'écart-type de $\sigma(X)$.

Exercice 5 : Loi de PARETO permet notamment de modéliser des phénomènes rencontrés en démographie, les revenus d'une population, la comparaison de modes de calcul d'impôts sur des revenus, le parc des appartements en location dans une agglomération etc...

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Paréto de paramètres réels a et α strictement positifs. La fonction de répartition associée F est définie, pour x_0 réel positif donné, par :

$$F(x)=\begin{cases} 1-\frac{a}{x^\alpha} & si\ x > x_0 \\ 0 & si\ x \leq x_0 \end{cases}$$

1) En utilisant la continuité de F en x_0, déterminer a en fonction de x_0 et de α.

2) En déduire la fonction densité de probabilité f de X.

3) Une étude expérimentale donne : $P(X \leq 10) = 0,75$ et $P(X \leq 50) = 0,99$. Déterminer les paramètres de la loi de X.

4) Calculer l'espérance de X puis représenter graphiquement f.

Exercice 6 : Soit X une v.a.r. de densité f continue et de fonction de répartition F strictement monotone.

1) Exprimer à l'aide de f et de F la densité de probabilité et la fonction de répartition de chacune des variables aléatoires suivantes :

a) $Y = aX + b$, b) $Z =\mid X \mid$, c) $T = X^2$, d) $U = ln \mid X \mid$ et e) $V = e^X$

Application : loi uniforme sur [-1 , 1] de fonction densité f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ x \in [-1, 1] \\ 0 & sinon \end{cases}$

2) Montrer que f est une fonction densité de probabilité. Calculer E(X) et V(X).

3) Quelle est la loi de la v.a.r. Y = 2X + 1. Calculer E(Y) et V(Y).

4) Quelle est la loi de la v.a.r. $Z =\mid X \mid$. Calculer E(Z) et V(Z).

5) Quelle est la loi de la v.a.r. $T = X^2$. Calculer E(T) et V(T).

*************** ••• ***************

$* * *$ ***Indications et résultats - Fiche C : Variables aléatoires réelles (discrètes et continues)*** $* * *$

Exercice 1 : 1) et 2) 3) $E(S) = 4.8$ points et $V(S) = 2.16$ points.

s_k	2	4	5	6	7
$p_k = P(S = s_k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
$F(s_k) = P(S \leq s_k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	1

Exercice 2 : 1) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 2) $F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(3x - \frac{x3}{3})$ si $0 \leq x \leq \sqrt{3}$, $F(x) = 1$ si $x > \sqrt{3}$
3) 77% , 57.9% , 34.9% 4) $E(X) = 0.649$ et $V(X) = 0.179$.

Exercice 3 : 1) f(x) = $\begin{cases} \frac{6x}{5}(3-2x) & si\ 0 < x < 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$;
Mode = $\frac{3}{4}$: la valeur la plus probable (valeur qui rend maximale la fonction densité).
3) $E(X) = 0.6$ et $V(X) = 0.06$ 4) $F(M) = \frac{1}{2} \Rightarrow 8M^3 - 18M^2 + 5 = 0\ M \simeq 0.619$
5) 39.96% 6) $P[(X_1 < 0.5) \cap (X_2 < 0.5)] = P(X_1 < 0.5) \times P(X_2 < 0.5) = F(0.5)^2 = 12.25\%$
7) conditions : $a = b + 1$ et $-1 < b < 2$.

Exercice 4 : 1) $\Omega(X) =]0, 1[$ 2) $b = 2$ et $c = 0$ 4) f(x) = -2(x - 1) si $0 < x < 1$, f(x) = 0 ailleurs.
5) $E(X) = \frac{1}{3}$; $V(X) = \frac{1}{18}$; $\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{18}}$.

Exercice 5 : 1) $a = x_0^\alpha$ 2) f(x) = $\begin{cases} 0 & sinon \\ \alpha x_0^\alpha x^{-(\alpha+1)} & si\ x > x_0 \end{cases}$,
3) $\alpha = 2$ et $x_0 = 5$, f(x) = $\begin{cases} 0 & sinon \\ 50x^{-3} & si\ x > 5 \end{cases}$, 4) $E(X) = 10$.

Exercice 6 : densités de probabilité :
a) g(y) = $\frac{1}{|a|}f((y-b)/a)\ \forall a \in R^*$
b)$h(z) = 0$ si $z \leq 0$ $h(z) = f(z) + f(-z)$ si $z > 0$
c) $k(t) = 0$ si $t \leq 0$ $k(t) = (1/2\sqrt{t})[f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})]$ si $t > 0$
d) $l(u) = e^u[f(e^u) + f(-e^u)]\ \forall u \in R$
e) $r(v) = 0$ si $v \leq 0\ r(v) = \frac{1}{v}f(lnv)$ si $v > 0$
2) $E(X) = 0$; $V(X) = \frac{1}{3}$
3) $k(y) = \frac{1}{4}$ si $y \in [-1, 3]$, $k(y) = 0$ sinon ; $E(Y) = 1$; $V(Y) = \frac{1}{4}$
4) $g(z) = 1$ si $z \in [0, 1]$, $g(z) = 0$ sinon ; $E(Z) = \frac{1}{2}\ V(Z) = \frac{1}{12}$
5) $h(t) = 1/2\sqrt{t}$ si $t \in [0, 1]$, $h(t) = 0$ sinon ; $E(T) = \frac{1}{3}$; $V(T) = \frac{4}{45}$

*************** ••• ***************

UFR DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION — UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2 — UNIVERSITÉ DE LYON

Fiche D : VARIABLES ALEATOIRES REELLES USUELLES

***** *Variables aléatoires réelles discrètes* *****

Exercice 1 : Considérons une aire d'autoroute avec petit commerce et station service. Soit la variable aléatoire X égale au nombre de personnes s'arrêtant à cette station service en une période de 15 minutes. Après enquête, supposons que la loi de probabilité de X soit donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4^+
P(X = k)	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

La probabilité pour qu'une personne s'arrêtant à la station service prenne du super sans plomb est supposée être égale à 0,4.

1) Calculer E(X) et $\sigma(X)$.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes prenant du super sans plomb en une période de 15 minutes.

2) Pour tout i de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, trouver la loi de Y sachant X = i.

Exercice 2 : On suppose qu'un avion peut se maintenir en vol si au moins la moitié de ses moteurs fonctionne. On supposera que les moteurs tombent en panne indépendamment les uns des autres, et que la probabilité de panne au cours d'un vol est la même pour chaque moteur de l'avion, notée p.

1) Soient X_2 *et* X_4 les variables aléatoires "nombre de moteurs qui tombent en panne au cours d'un vol" pour, respectivement, un bimoteur et un quadrimoteur.

a) Etablir les lois respectives de X_2 et X_4.

b) Calculer, pour le bimoteur et pour le quadrimoteur, la probabilité pour qu'aucun moteur ne tombe en panne au cours d'un vol.

2) Vaut-il mieux voyager en bimoteur ou en quadrimoteur ?

a) Dans le cas général.

b) Dans les cas où, $p = 0,001$ puis $p = 0,4$.

Exercice 3 : Une plaque métallique comporte k défauts de fabrication. Lors d'un contrôle un défaut a la probabilité $p = \frac{3}{4}$ d'être détecté par le contrôleur (et il y a indépendance entre la détection des différents défauts).

a) Calculer l'espérance mathématique du nombre de défauts non détectés.

b) Calculer ensuite cette espérance si la plaque est soumise à 2 contrôles indépendants.

Exercice 4 : D'après une étude sur le comportement du consommateur, il semble que 3 consommateurs sur 5 soient influencés par la marque du produit lors d'un achat. Le responsable Marketing d'un grand magasin interroge 20 consommateurs choisis au hasard afin de connaître leur réaction sur ce sujet.

1) Montrer que B(x ; n , p) = B(n-x ; n , q). Cf. Table de la loi binomiale.

2) Quelle est la probabilité que moins de 10 consommateurs se déclarent influencés ?

Exercice 5 : Une entreprise fabrique des pièces avec une grande précision. Cependant ces pièces risquent de présenter deux défauts D_1 et D_2. Les ingénieurs décident alors de recourir à des tests portant sur l'ensemble des pièces. Les résultats d'études statistiques, menées sur un effectif suffisamment grand pour être significatifs, ont montré que :

- 9% des pièces fabriquées qui présentent le premier défaut D_1.

- parmi les pièces présentant le premier défaut D_1, il y en à 21% qui présentent également le deuxième défaut D_2.

- parmi les pièces ne présentant pas le premier défaut D_1, il y en à 7% qui présentent le deuxième défaut D_2.

1) On décide de choisir au hasard une pièce parmi toutes les pièces fabriquées. Calculer :

a) la probabilité de l'événement : "la pièce présente les deux défauts D_1 et D_2.

b) la probabilité de l'événement : "la pièce présente le défauts D_2 mais pas le défaut D_1.

c) En déduire la probabilité de l'événement : "la pièce présente le défauts D_2.

d) la probabilité de l'événement : "la pièce ne présente aucun des deux défauts.

On décide de changer de procédure. Au cours de la fabrication, on prélève successivement, et au hasard, une à une, 14 pièces pour constituer un échantillon.

2) Déterminer la probabilité de l'événement : " il y a au moins 13 pièces de l'échantillon qui ne présentent aucun des deux défauts D_1 et D_2.

Exercice 6 : Une machine a fabriqué 500 articles dont 5 sont défectueux. On tire au hasard 20 articles. On supposera le tirage avec puis sans remise.

1) Déterminer la moyenne et la variance du nombre de pièces défectueuses.

2) Quelle est la probabilité qu'aucun de ces 20 articles ne soit défectueux ? Les résultats vous surprennent-ils ?

Exercice 7 : Un restaurant peut servir 75 repas. La pratique montre que 20% des clients ayant réservé ne viennent pas. Le restaurateur accepte 90 réservations.

1) Quelle est la probabilité qu'il se présente plus de 50 clients ?

2) Combien le restaurateur doit-il accepter de réservations pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 90% de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront ?

Exercice 8 : On suppose que la durée de vie, en jours, d'une ampoule, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{100}$.

1) Quelle est la durée de vie moyenne d'une ampoule ?

2) Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure encore au moins 10 jours, sachant qu'à son nème jour, elle marche encore ?

Exercice 9 : Une entreprise fabrique de petites tiges métalliques dont la longueur doit se situer dans l'intervalle [8cm - 12cm]. On admet que la longueur est normalement distribuée $N(10; \sigma^2)$; le procédé de fabrication produit des tiges de longueur moyenne m = 10 cm et d'écart-type $\sigma = 1$ cm.

1) Déterminer puis interpréter le coefficient de variation de la longueur des tiges.

2) Quelle est la probabilité qu'une tige ait une longueur inférieure à 8cm ? Supérieure à 12 cm ? Comprise entre 8 et 12 cm ?

3) Quelle est la probabilité qu'une tige ait une longueur qui diffère de la moyenne par $\pm$ 1 cm ?

4) Dans 90% des cas, les tiges auront une longueur de moins de combien de centimètres ?

5) 10% des tiges ont moins de combien de centimètres ?

6) 15% des tiges ont plus de combien de centimètres Si une tige est trop longue, elle peut être coupée pour correspondre aux normes mais à un coût supplémentaire de $0,25$ euro la tige. Si la tige est trop petite, elle doit être jetée.

7) Sur une fabrication de 10000 tiges, combien devront être jetées ?

8) S'il en coûte 500 euros pour fabriquer 1000 tiges et que le prix de vente unitaire est de $0,90$ euro, quel profit l'entreprise peut s'attendre de faire pour une fabrication de 10000 tiges ?

9) Considérant qu'une tige jetée occasionne une perte plus grande qu'une tige coupée, on décide d'ajuster la machine afin de centrer le procédé à $10,5$ cm. Est-ce que cette opération est rentable ? Comparer le profit résultant entre l'ajustement à 10 cm et à $10,5$ cm pour une fabrication de 10000 tiges.

Exercice 10 : Un fabricant de moniteur-vidéo veut déterminer la période de garantie qu'il devrait associer au tube-écran, le composant le plus important du moniteur. Des essais en laboratoire ont indiqué que la durée de vie utile (en années) de ce composant est distribué selon une loi exponentielle avec un taux moyen de défaillance de $0,20$ tube/an.

1) Quelle est la durée de vie moyenne des tubes ?

2) Quelle est la probabilité qu'un tube opère sans défaillance pour une période excédant sa durée de vie espérée ?

3) Sur 1000 tubes de ce genre, combien seront défaillants au cours des cinq premières années ?

4) Quelle est la probabilité que la durée de vie d'un tube soit comprise entre sa moyenne plus ou moins un écart-type ?

5) 50% des tubes fonctionnent sans défaillance pendant combien de temps ?

6) On veut donner une période de garantie sur le tube ; toutefois, on ne veut pas remplacer plus de 10% de tubes au cours de cette période de garantie. Quelle devrait être la période de garantie ?

Exercice 11 : Une entreprise veut s'assurer que 80% des composants électroniques qu'elle fabrique fonctionnent toujours après 558 heures d'opération. On supposant que la durée de vie des composants est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre λ. Quel devrait être le temps moyen de bon fonctionnement $\beta = 1/\lambda$ pour correspondre à cette exigence ?

Exercice 12 : On note M_0 le prix donné aujourd'hui à un titre de valeur mobilière et M_n le prix du titre après n mois additionnels, $n \geq 1$. Un modèle couramment utilisé pour évaluer les prix du titre consiste à considérer les rapports des prix mensuels $R_n = \frac{M_n}{M_{n-1}}$, $n \geq 1$, qui sont supposés indépendants et identiquement distribués selon une loi log-normale de paramètres $\mu = 0.02$ et $\sigma^2 = 0.08^2$.

1) Quelle est la probabilité que le prix croisse dans chacun des 2 mois suivants ?

2) Quelle est la probabilité que le prix soit plus élevé après 2 mois qu'aujourd'hui ?

Exercice 13 : Une entreprise contrôle la qualité d'adhésion des étiquettes sur des contenants. La machine effectuant le collage des étiquettes en produit environ 2000 dans la journée. Pour chaque lot de contenants étiquetés, une inspection visuelle est faite en prélevant au hasard un échantillon de 20 contenants et en notant le nombre de contenants mal étiquetés (colle insuffisante, mauvaise couleur, apparence inacceptable, etc.). La fabrication d'une journée comporte 5% de défectueux.

1) Quelle est la loi de probabilité du nombre de contenants mal étiquetés dans l'échantillon ?

2) A combien de contenants mal étiquetés, cette entreprise peut-elle s'attendre en moyenne ?

3) Quelle est la variance du nombre de contenants mal étiquetés dans l'échantillon ? En déduire puis interpréter son coefficient de variation.

4) Quelle est la probabilité qu'au plus le quart des contenants soit défectueux ?

5) Quelle est la probabilité qu'il y ait moins de quatre contenants mal étiquetés ?

6) Quelle est la probabilité pour que le nombre de contenants défectueux soit compris entre sa moyenne plus ou moins un écart type ?

7) Quelle quantité de contenants défectueux a la plus forte probabilité d'être observée dans l'échantillon ?

8) Un lot est refusé s'il contient plus de 3 contenants défectueux dans un échantillon de 20 contenants. Quelle est la probabilité de refuser le lot avec ce plan de contrôle ?

9) Quelle est la loi de probabilité du nombre de lots acceptés dans un échantillon de 100 lots à commercialiser ?

10) Vérifiez que $P[Z = 5] = P[Y = 95]$ où, Y représente le nombre de lots acceptés et Z celui du nombre de lots refusés dans un échantillon de 100 lots à commercialiser.

11) Quelle doit être la taille minimale de l'échantillon à prélever pour que la probabilité qu'aucun contenant défectueux soit supérieure à 50% ?

Exercice 14 : Soit $X \to N(m; \sigma^2)$ telle que $P(X < 3) = 0.1587$ et $P(X > 12) = 0.0228$. Calculer la probabilité $P(1 < X < 10)$.

Exercice 15 : Loi Log-normale. Soit U une variable aléatoire normale centrée réduite $N(0,1)$.

1) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle $Y = e^U$?

2) Calculer E(Y) et V(Y).

3) Déterminer les probabilités suivantes : $P(Y \leq 1)$, $P(\mid Y - 1 \mid \leq 0.5)$.

Exercice 16 Dans un magasin de pièces détachées, le temps nécessaire pour servir des clients est distribué selon une loi exponentielle avec une durée moyenne de service de 5 minutes par client.

1) Quelle est alors la valeur du paramètre de cette loi ?

2) Représenter la fonction densité de probabilité associée à la durée de vie de service.

3) Quelle est la probabilité pour que la durée de service soit inférieure à 2 minutes ? Supérieure à 6 minutes ? Comprise entre 3 et 8 minutes ?

4) Est-ce exacte de dire qu'il y a 50% de chances pour que la durée de service d'un client soit inférieure à la durée moyenne de service ?

Exercice 17 : On considère un composant électronique dont la durée de vie (en années) suit une loi exponentielle d'espérance 10 ans.

1) Déterminer les fonctions densité de probabilité et de répartition ainsi que l'écart-type de la durée de vie du composant.

2) Quelle est la probabilité qu'un tel composant ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? Supérieure à 10 ans ? Comprise entre 5 et 10 ans ?

3) Un composant électronique de ce type fonctionne déjà depuis 8 ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore au moins pendant 5 ans ? 10 ? Que remarque-t-on ?

Exercice 18 : Une compagnie de transport, dont la clientèle est composée d'usagers réguliers effectuant 400 trajets par an, étudie un projet offrant à ces usagers le choix entre :

- un abonnement - titre de transport noté C de 3800 uros pour l'ensemble des trajets annuels

- pour les voyageurs ne voulant pas se procurer le titre de transport C le paiement d'une amende de M en cas de contrôle.

La compagnie prévoit d'organiser les contrôles de façon que la probabilité d'un tel contrôle soit pour chaque trajet égale à $\frac{1}{12}$, avec indépendance d'un trajet par rapport à l'autre.

Soit A un voyageur choisi au hasard. On note X la variable aléatoire associée au "nombre de trajets de A contrôlés par an" :

1) Donner la loi de probabilité de X.

2) Calculer le nombre moyen de trajets contrôlés.

3) Quel sera en fonction de M, le coût moyen annuel des trajets pour un usager qui ne se procurera pas le titre de transport C ?

4) En déduire la valeur qu'il convient de donner à M pour que, en moyenne, les deux choix proposés aux usagers soient financièrement équivalents pour la compagnie

5) La compagnie fixe M à 115 . Si A ne s'est pas procuré le titre de transport C, quelle est la probabilité que le coût de ses trajets annuels soit au moins égal à 3800 ?

*************** ••• ***************

$***$ Indications et résultats - Fiche D : Variables aléatoires réelles (discrètes et continues) usuelles $***$

Exercice 1 : 1) $E(X) = 2$ personnes et $V(X) = 1.2 \Rightarrow \sigma(X) = 1,095$ personne.
2) la v.a.r. Y/X_i suit une loi Binomiale : $P_{X=i}(Y=k) = C_i^k 0.4^k 0.6^{i-k}$ pour tout k = 0, 1, ... i.
pour i = 0 aucune personne ne s'arrête à la station : $P_{X=0}(Y=0) = 1$
pour i = 1 une personne s'arrête à la station : $P_{X=1}(Y=0) = 0.6$ et $P_{X=1}(Y=1) = 0.4$
etc.
pour i = 4 personnes s'arrêtent à la station : $P_{X=4}(Y=0) = 0.1296$, $P_{X=4}(Y=1) = 0.3456$,
$P_{X=4}(Y=2) = 0.3456$, $P_{X=4}(Y=3) = 0.1536$, $P_{X=4}(Y=4) = 0.0256$

Exercice 2 : 1a) Bimoteur $X_2 \rightarrow B(2,p)$; $P(X_2 = k)C_2^k p^k (1-p)^{2-k}$ pout k = 0, 1 et 2.
Quadrimoteur $X_4 \rightarrow B(4,p)$; $P(X_4 = k)C_4^k p^k (1-p)^{4-k}$ pout k = 0, 1, ... 4.
1b) $P(X_2 = 0) = (1-p)^2$, $P(X_4 = 0) = (1-p)^4$
1b) $P(X_2 > 1) = P(X_2 = 2) = p^2$, $P(X_4 > 2) = p^3(4-3p)$
2a) Cas général : $P(X_2 > 1) - P(X_4 > 2) = p^2 - p^3(4-3p)$ Il y a 2 racines : $p_1 = 1$ et $p_2 = \frac{1}{3}$
si $0 < p < p_2 = \frac{1}{3}$ la probabilité d'accident avec le bimoteur est plus grande,
si $p_2 = \frac{1}{3} < p < p_1 = 1$ la probabilité d'accident avec le quadrimoteur est plus grande,
si $p = \frac{1}{3}$ les deux sont à égalité de risque d'accident, si $p = 1$ il vaut mieux annuler son vol !!!
2b) Cas où $p = 0.001$ le quadrimoteur est préférable. Cas où $p = 0.4$ (énorme) le bimoteur est préférable.

Exercice 3 : 1) $\frac{k}{4}$ 2) $\frac{1}{2}$

Exercice 4 : 2) 12.73%

Exercice 5 : 1) $P(D_1 \cap D_2) = 1.89\%$, $P(\overline{D_1} \cap D_2) = 6.37\%$, $P(D_2) = 8.26\%$, $P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) = 84.63\%$,
2) X $\rightarrow B(n = 14; p = P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) = 0.8463)$, $P(X \geq 13) = 34.25\%$.

Exercice 6 : Avec remise (Binomiale) :) 0,2 ; 0,198 2) 0,8179 ; Sans remise (Hypergéométrique) : 1) 0,2 ; 0,1905 2) 0,8147
Faible taux de sondage : 4%

Exercice 7 : 1) $\simeq 1$ 2) 88 réservations.

Exercice 8 : 1) E(X) = 100 jours 2) $e^{-1/10}$

Exercice 9 : 1) 10% très homogène 2) $2,27\%$, $2,27\%$, $95,45\%$ 3) $68,27\%$ 4) 11,28 cm , 5) 8,72 cm , 6) 11,04 cm ,
7) 228 tiges , 8) 3737,8 euros , 9) oui , 3776,05 euros.

Exercice 10 : 1) 5 ans 2) $36,79\%$ 3) environ 632 tubes seront défaillants. 4) $86,47\%$ 5) $3,4657$ ans 6) $0,5268 \simeq 6$ mois.

Exercice 11 : 2500 heures.

Exercice 12 : 1) 35.84% 2) 63.82%

Exercice 13 : 1) Loi exacte : Hypergéométrique $H(N = 2000; n = 20; p = 5\%)$
2) E(X) = np = 1 3) $V(X) = npq\frac{N-n}{N-1} = 0.9410$; $CV = |\frac{\sigma(X)}{E(X)}| = 97\%$
4) $P(X \leq 5) = 99.97\%$ 5) $P(X < 4) = 98.46\%$
6) $P(E(X) - \sigma(X) \leq X \leq E(X) - \sigma(X)) = 37.93\%$
7) Mode = 1 8) $P(X > 3) = 1.54\%$ 9) $Y \rightarrow B(n = 100 ; p = 98.46\%)$
10) $P[Z = 5] = P[Y = 95] = 18\%$ 11) $n^* < 13.51 \leq 13$ contenants.
Remarque : Dans ce cas, on peut approximer la loi exacte hypergéométrique $H(N = 2000, n = 20, p = 5\%)$ par la loi dite approximée binomiale $B(n = 20 , p = 5\%)$ car le taux de sondage $t = \frac{n}{N} = \frac{20}{2000} = 1\%$ ($< 10\%$) est très faible. Les deux distributions sont très proches cf. chapitre 5. Approximations.

Exercice 14 : 1) m = 6 et $\sigma = 3$; 2) 86.07%

Exercice 15 : 1) $g(y) = 0$ si $y \leq 0$, $g(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(lny)^2}{2}}$ si $y > 0$ 2) $E(Y) = e^{\frac{1}{2}}$; $V(Y) = e^2 - e^1$ 3) 50% ; 41.33%

Exercice 16 : 1) 0.20 2) $32,97\%$, 30.12% , 34.69% 4) faux : 63.21%.

Exercice 17 : 2) 60.65% ; 36.79% ; 23.87% 3) $60.65\% = 1 - F(5)$; $36.79\% = 1 - F(10)$. Remarque : la loi exponentielle est une loi sans mémoire : $\forall t > 0$ et $\forall h > 0$ $P[(T > t+h)/(T > t)] = P(T > h)$. Tout se passe comme si le passé était oublié .

Exercice 18 : 1) $X \rightarrow B(400, p = \frac{1}{12})$; $P(X = k) = C_{400}^k (\frac{1}{12})^k (\frac{11}{12})^{400-k}$ pout k = 0, 1, ... 400.
2) $E(X) = np = \frac{100}{3}$ trajets contrôlés annuellement. 3) $C = \frac{100M}{3}$, 4) $M = 114$,
5) $P(XM \geq 3800) = P(X \geq 34) = 1 - P(X < 34) = 1 - F(33) = 47.79\%$
$F(33) = P(X = 0) + ... + P(X = 33) = 52.21\%$ calculée à l'aide d'un tableur.

*************** ◦◦◦ ***************

UFR de sciences économiques et de gestion — Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

Fiche E : APPROXIMATIONS ET CONVERGENCE

Exercice 1 : Recherche d'approximations. Soit la variable aléatoire X de loi $B(n = 50\ ;\ p = 0,5)$

1) Montrer que l'approximation normale est la seule approximation possible de la loi de X et déterminer ses paramètres.

2) Calculer à partir de cette approximation (sans oublier la nécessaire correction de continuité) les probabilités suivantes : $P(X = 50)$, $P(X = 0)$, $P(X = 27)$, $P(X > 33)$, $P(X < 18)$, $P(12 < X < 24)$, $P(15 \leq X \leq 35)$, $P(20 \leq X < 35)$, $P(X \geq 35)$.

Exercice 2 :

Pour chacun des exemples suivants, on justifiera le choix de l'approximation utilisée. Comparez les valeurs approchées obtenues par l'approximation avec les valeurs exactes des probabilités.

1) Soit X une v.a.r. suivant une loi binomiale de paramètres $n = 75$ et $p = 0,02$. Donner des valeurs approchées de probabilités : $P(X = 2)$, $P(X \geq 2)$ et $P(2 < X \leq 4)$.

2) Soit X une v.a.r. suivant une loi de Poisson de paramètre 25. Donner des valeurs approchées des probabilités : $P(X = 15)$, $P(15 < X < 20)$ et $P(16 < X \leq 18)$.

3) Soit X une v.a.r. suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,4$. Donner des valeurs approchées des probabilités : $P(X > 5)$ et $P(2 < X \leq 6)$.

Exercice 3 : Durée de fonctionnement. Soient n entier naturel et α réel strictement positif. Considérons l'intégrale convergente telle que :

$$I(n, \alpha) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

Un composant électronique particulier a une durée de fonctionnement, exprimée en jours, caractérisée par une variable aléatoire réelle X. Considérons l'application f de R dans R définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \beta x^2 e^{-\alpha x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1) Montrer que $\beta = \frac{\alpha^3}{2}$ pour que f soit une densité de probabilité de X.

2) Déterminer α sachant qu'un composant fonctionne en moyenne 200 jours. Calculer $\sigma(X)$.

On prélève un échantillon d'une centaine de composants similaires en sortie de la chaine de production. Soit Y la v.a.r. égale à la moyenne des durées de fonctionnement de ces 100 composants.

3) Calculer que $E(Y)$ et $V(Y)$.

4) Justifier par un théorème que Y suit approximativement une loi normale.

5) Déterminer le réel ε pour lequel on a $P(|M - 200| > \varepsilon) \leq 5\%$.

Exercice 4 : La demande journalière pour un produit est une variable aléatoire réelle X qui suit une loi de Poisson.

1) Déterminer la valeur entière du paramètre λ de la loi de probabilité de X sachant que la probabilité de n'avoir aucune demande un jour donné est de l'ordre de 0.6738%.

2) Le magasin recomplète son stock chaque matin à raison de 6 unités. Quel est en moyenne, sur 100 jours, le nombre de jours avec rupture de stock ?

3) On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de jours avec rupture de stock sur 100 jours. Reconnaitre la loi exacte de Y.

4) Peut-on approximer la loi de Y par une loi normale ? Préciser ses paramètres.

Exercice 5 : Le nombre d'inscriptions pédagogiques à un cours optionnel de statistique multidimensionnelle (Analyse des données) de master 1 de management stratégique est supposé suivre une loi de probabilité de Poisson d'espérance mathématique 64. Le professeur de cet enseignement a décidé que si le nombre d'inscriptions est supérieur à 80 étudiant(e)s, ce qui correspond à la capacité maximale de la salle réservée à ce cours, il organisera deux groupes et donnera deux cours.

1) Quelle est la probabilité que ce professeur ait à dédoubler son cours magistral ?

2) Quelle est la probabilité que le cours magistral soit dédoublé si l'effectif de la promotion est de 144 étudiant(e)s et en sachant que chaque étudiant(e) est libre de choisir ou pas ce cours optionnel ?

Exercice 6 : Un fabricant produit des transistors dont 1% sont défectueux. Il les ensache par paquets de 100 et les garantit à 98%. Quelle est la probabilité que cette garantie tombe en défaut ?

Exercice 7 : Une compagnie de transport, dont la clientèle est composée d'usagers réguliers effectuant 400 trajets par an, étudie un projet offrant à ces usagers le choix entre :

- un titre de transport noté C de 4000 uros pour l'ensemble des trajets annuels

- pour les voyageurs ne voulant pas se procurer le titre de transport C le paiement d'une taxe de M en cas de contrôle.

La compagnie prévoit d'organiser les contrôles de façon que la probabilité d'un tel contrôle soit pour chaque trajet égale à $\frac{1}{10}$, avec indépendance d'un trajet par rapport à l'autre. On note X la variable aléatoire associée au "nombre de trajets contrôlés par an d'un voyageur choisi au hasard"

1) Donner la loi de probabilité de X.

2) Calculer le nombre moyen de trajets contrôlés.

3) Quel sera en fonction de M, le coût moyen annuel des trajets pour un usager qui ne se procurera pas le titre de transport C ?

4) En déduire la valeur qu'il convient de donner à M pour que, en moyenne, les deux choix proposés aux usagers soient financièrement équivalents pour la compagnie.

La compagnie fixe M à 105 .

5) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?

6) Si le voyageur ne s'est pas procuré le titre de transport C, quelle est la probabilité que le coût de ses trajets annuels soit au moins égal à 4000 ?

Exercice 8 : Dans le processus de construction de ses avions, Aérospace utilise des assemblages qui nécessitent une grande quantité de rivets bombés conformes aux exigences aéronautiques. Le moindre écart du diamètre du rivet a un impact au niveau du rivetage. Aérospace attache donc un soin tout particulier à la procédure de contrôle de réception de ses rivets, qui arrivent par livraison de 100 000. L'entreprise qui fournit ces rivets s'est engagée par contrat à respecter un taux de défectueux égal à 1%. Une inspection de tous les rivets n'étant pas possible, la procédure utilisée pour contrôler une livraison est la suivante : on prélève 1000 rivets différents et l'on vérifie la conformité de leur diamètre. On note X la v.a.r. associée au nombre de rivets défectueux. La règle de décision est d'accepter la livraison si $X \leq 15$, et de la refuser sinon.

1) Etablir la loi de probabilité exacte de X, pour une livraison conforme, ainsi que son approximation discrète usuelle, dont on donnera la moyenne et la variance.

2)Donner une valeur approchée de la probabilité notée p_1, de refuser une livraison.

C'est à partir de 2% de défectueux qu'une livraison pose de sérieux problèmes à Aérospace.

3) Donner une valeur approchée de la probabilité p_2 d'accepter une livraison comportant 2% de défectueux.

Exercice 9 : Le directeur marketing d'une entreprise utilise deux supports publicitaires pour vanter les charmes de son produit auprès des consommateurs potentiels, un quotidien national, et une chaîne de télévision. Les chiffres qui suivent portent sur les consommateurs potentiels du produit :

- un consommateur sur dix est touché par le journal, contre un sur cinq par la télévision ; il faut cependant noter qu'un consommateur sur vingt est touché simultanément par les deux supports.

- un consommateur sur dix achète le produit, parmi les consommateurs touchés par la publicité, contre un sur cinquante parmi ceux qui ne sont pas touchés.

1) Calculer la probabilité pour qu'un consommateur soit touché par la publicité.

2) On choisit un consommateur au hasard, et on appelle succès le fait qu'il soit acheteur du produit. Quelle est la probabilité du succès ?

On suppose qu'il y a 10 000 consommateurs parmi lesquels on choisit au hasard 100 consommateurs différents. On note X la variable aléatoire réelle associée au "nombre d'acheteurs parmi les cent consommateurs choisis"

3) Déterminer la loi de probabilité exacte de X, ainsi que son espérance et sa variance.

4) Par quelle(s) loi(s) discrète(s) peut-on approximer la loi de X ? Indiquer l'espérance et la variance correspondant à chaque approximation.

5) Evaluer alors les probabilités : $P(X = 2)$ et $P(1 < X < 5)$, en utilisant ces deux approximations tour à tour.

6) Pourquoi l'approximation normale de la loi de X n'est-elle pas entièrement justifiée ? Comparer les résultas précédents à ceux que donne l'approximation normale.

Exercice 10 : Un fabricant produit des transistors dont 1% sont défectueux. Il les ensache par paquets de 100 et les garantit à 98%. Soit X la variable aléatoire réelle associée au "nombre de transistors défectueux dans un paquet de 100".

1) Déterminer la loi de probabilité de X et la reconnaitre.

2) Peut-on approximer la loi de X par une loi discrète ? pourquoi ?

3) Peut-on approximer la loi de X par une loi continue ? pourquoi ?

4) Calculer alors la probabilité que cette garantie tombe en défaut.

Exercice 11 : On veut transporter 2352 supporteurs de l'Olympique Lyonnais à Paris pour assister à un match de championnat de football. Les 2352 voyageurs sont arrivés pratiquement en même temps à la Gare Perrache de Lyon. La SNCF a mis à leur disposition quatre trains identiques sans réservation. On suppose que chaque supporteur choisit au hasard l'un des quatre trains et qu'il n'a pas le temps d'en changer.

a) Etablir la loi de probabilité exacte du nombre de supporteurs qui voyagent dans un des quatre trains parmi les 2352 voyageurs ? Par quelle loi de probabilité peut-on l'approximer ? Caractériser le ou les paramètre(s) de cette loi approchée. Justifier votre réponse.

b) Donner une valeur approchée de la probabilité qu'un train transporte le quart des supporteurs.

c) Combien faut-il prévoir de places assises dans chaque train si l'on veut que la probabilité pour que tous les voyageurs soient assis, soit supérieure ou égale à 99.50%?

d) Donner une valeur approchée de la probabilité de l'événement : les 4 trains partent avec exatement le même nombre de voyageurs.

*************** ••• ***************

Université Lumière Lyon 2 — UFR de Sciences Économiques et de Gestion — Université de Lyon

*** ***Indications et résultats - Fiche E : Approximations et convergence*** ***

Exercice 1 : 1) 0% ; 2) 0% ; 3) 9.8% ; 4) 0.08% ; 5) 1.7% ; 6) 33.7% ; 7) 99.7% ; 8) 22.36% ; 9) 44.64%

Exercice 2 : Valeur approchée (valeur exacte)

1) X $\rightarrow B(n = 75\ ;\ p = 0,02) \simeq P(\lambda = 1,5)$. $P(X = 2) = 25.10\%\ (25.40\%)$, $P(X \geq 2) = 44.22\%\ (44.39\%)$ et $P(2 < X \leq 4) = 17.26\%\ (17.25\%)$.

2) X $\rightarrow P(\lambda = 25) \simeq N(m = 25\ ;\ \sigma^2 = 5^2)$. $P(X = 15) = 1.08\%\ (0.989\%)$, $P(15 < X < 20) = 11.78\%\ (11.13\%)$ et $P(16 < X \leq 18) = 5.22\%\ (5.43\%)$.

3) X $\rightarrow B(n = 20\ ;\ p = 0,4)$ aucune approximation possible : $P(X > 5) = (0,097\%) et\ P(2 < X \leq 6) = (4.38\%)$.

Exercice 3 : 1) Vérifier : $\begin{cases} \forall x \in R\ \ f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$ 2) $\alpha = \frac{3}{200}$ $\sigma(X) = 100\sqrt{\frac{4}{3}}$ 3) $E(Y) = 200$ et $V(Y) = \frac{400}{3}$ et $\sigma(Y) = 10\sqrt{\frac{4}{3}}$. 4) Théorème central limite : Y $\rightarrow N(m = 200; \sigma^2 = (10\sqrt{\frac{4}{3}})^2$ 5) $\varepsilon \geq 22.63$.

Exercice 4 : 1) $E(X) = V(X) = \lambda = 5$ 2) 23.78% , 24 jours. 3) Binomiale : Y $\rightarrow B(n = 100\ ;\ p = 23.78\%)$ 4) Y $\rightarrow B(n = 100\ ;\ p = 23.78\%) \simeq N(m = 23.78\ ,\ \sigma^2 = 4.26^2)$.

Exercice 5 : 1) 1.96% 2) 7.83%

Exercice 6 : loi Binomiale $X \rightarrow B(n = 100; p = \frac{1}{100}) \simeq P(\lambda = 1)$ (Approximation par une loi de poisson).

Exercice 7 : 1) X $\rightarrow B(n = 400\ ;\ p = \frac{1}{10})$ 2) $E(X) = np = 40$ trajets contrôlés en moyenne. 3) $40M$ 4) $M = 100$ 5) X $\rightarrow B(n = 400\ ;\ p = \frac{1}{10}) \simeq N(m = 40\ ;\ \sigma^2 = 6^2)$ 6) 60%.

Exercice 8 : X $\rightarrow$ H(N = 100000 ; n = 1000 ; p = 0.01) $\simeq B(n = 1000\,;\, p = 0.01) \simeq P(10)$
avec $E(X) = 10$ et $V(X) = 9.9$. 2) $p_1 = P(X > 15) = 4.87\%$
3) X $\rightarrow B(n = 1000\,;\, p = 0.02) \simeq N(m = 20\,;\, \sigma^2 = 19.6)$ $p_2 = P(X \leq 15) = 15.4\%$.

Exercice 9 : 1) $P(Pub) = P(J \cup T) = 25\%$ 2) $P(S) = 4\%$
3) X est liée au résultat du choix au hasard des 100 consommateurs parmi 10 000 et repose donc sur le hasard.
X $\rightarrow H(N = 10000\,;\, n = 100\,;\, p = 4\%)$, $E(X) = np = 4$ et $V(X) = npq\frac{N-n}{N-1} = 3$.
4) X $\rightarrow H(N = 10000\,;\, n = 100\,;\, p = 4\%) \simeq B(n = 100\,;\, p = 0.04) \simeq P(\lambda = 3)$
5) Binomiale : 14.50% et 54.20% , Poisson : 14.65% et 53.72%
6) $np = 4 < 15$, 12.16% et 49.70% valeurs approchées trop éloignées des valeurs exactes.

Exercice 10 : 1) X $\rightarrow B(n = 100\,;\, p = \frac{1}{100})$ 2) X $\rightarrow B(n = 100\,;\, p = \frac{1}{100}) \simeq P(1)$ 3) Non 4) $P(X > 2) = 7.94\%$
(valeur exacte), $P(X > 2) \simeq 8.03\%$ (valeur approchée par la loi de Poisson).

Exercice 11 : a) $X \rightarrow B(n = 2352\,;\, p = 0.25) \simeq N(m = 588\,,\, \sigma^2 = 21^2)$. b) 1.90% c) ≥ 642 places. d) $0.019^4 \approx 0$.

*************** ••• ***************