L3 - Economie & Gestion

Statistique Inférentielle

Corrigé du Contrôle Continu N°1
Durée 1h30 - Année universitaire 2024 - 2025

Exercice 1 : **(Barème de notation : a) 2 pts b) 1.5 pt c) 1.5 pt d) 2 pts e) 2 pts f) 2 pts = 11 pts)**

	Secteur du bâtiment	
Statut	Artisan (A)	Auto-entrepreneur (AE)
Nombre de relevés	61	51
Salaire mensuel net moyen observé (€)	1560	880
Ecart-type observé du salaire mensuel net (€)	8	10

a) Intervalle de confiance de niveau $1-\alpha = 95\%$ du salaire mensuel net moyen des auto-entrepreneurs :

Données : Salaire mensuel net moyen des auto-entrepreneurs :
$n_{AE} = 51$; $\overline{x}_{AE} = 880$; $s^2_{AE} = 10^2$; $s^{*2}_{AE} = \frac{n_{AE}}{(n_{AE}-1)} \times s^2_{AE} = 102 = 10.10^2$.
Conditions : $n_{AE} = 51$, échantillon de grande taille prélevé d'une population infinie de variance inconnue.

Statistique de test : $\frac{(\overline{X}_{n_{AE}} - m_{AE})}{\frac{s^*_{AE}}{\sqrt{n_{AE}}}} \rightarrow T_{n_{AE}-1=50\,d.d.l.}$

Valeur critique de Student à $\nu = n_{AE} - 1 = 50\,d.d.l.$: $t_{\alpha=2.5\%} = \pm 2.009$.

Marge d'erreur dans l'estimation du salaire net moyen par mois : m_{22} :
$E = t_{2.5\%} \frac{s^*_{AE}}{\sqrt{n_{AE}}} = t_{2.5\%} \frac{s_{AE}}{\sqrt{n_{AE}-1}} = 2.009 \frac{10}{\sqrt{50}} = 2.84$ €.

Estimation ponctuelle du salaire net moyen d'un auto-entrepreneur : $\overline{x}_{AE} = 880$ €.

Intervalle de confiance de niveau 95% de $m_{AE} \in [877.16€ \,;\, 882.84€]$

Conclusion : Puisque $900€ \notin [877.16€ \,;\, 882.84€]$, on peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que le salaire mensuel net moyen d'un auto-entrepreneur est significativement différent de 900 €.

b) Taille d'échantillon requise pour estimer le salaire mensuel net moyen d'un auto-entrepreneur avec une marge d'erreur d'au plus égale à 2 € et un risque d'erreur $\alpha = 5\%$:

Risque d'erreur : $\alpha = 5\%$; $t_{\alpha=2.5\%}$ de la table de Student à $\nu = n^*_{AE} - 1$ d.d.l.
On cherche n^*_{AE}, la taille d'échantillon requise de telle sorte que la marge d'erreur :
$E^* = t_{2.5\%} \frac{s^*_{AE}}{\sqrt{n^*_{AE}}} \leq 2 \Rightarrow E^* = u_{2.5\%} \frac{s^*_{AE}}{\sqrt{n^*_{AE}}} \leq 2€$.
Approximation de la loi de Student $T_{\nu=n^*_{AE}-1\,d.d.l.}$ par une loi normale N(0,1). la taille d'échantillon n^*_{AE} sera grande (> 30), pour $\alpha = 5\%$, le fractile de la loi de Student $t_{2.5\%} \simeq u_{2.5\%} = 1.96$.
$\Rightarrow n^*_{AE} \geq (\frac{u_{\frac{\alpha}{2}} s^*_{AE}}{E^*})^2 = (\frac{1.96 \times 10.10}{2})^2 \Rightarrow n^*_{AE} \geq 97.96 \Rightarrow n^*_{AE} \geq 98$ auto-entrepreneurs.

c) Niveau de confiance que l'on attribue à cet intervalle de confiance $[1558.02\,€\,;\,1561.98\,€]$ bilatéral symétrique du salaire mensuel net moyen d'un artisan, obtenu à partir d'un échantillon de taille 61 artisans :

Données : Artisans : $n_A = 61$; $\bar{x}_A = 1560$; $s_A^2 = 8^2$; $s_A^{*2} = \frac{n_A}{(n_A-1)} \times s_{n_A}^2 = 65.067 = 8.07^2$.

Marge d'erreur : $E = \frac{(1561.98-1558.02)}{2} = 1.98 = t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_A^*}{\sqrt{n_A}} \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\times\sqrt{n_A}}{s_A^*} = \frac{E\times\sqrt{n_A-1}}{s_A} = \frac{1.98\times\sqrt{60}}{8} = 1.917$ €.

cf. table Student à 60 d.d.l. , $P(\overline{X}_{n_A} \leq 1.917) = F(1.917) = 0.97$

$\Rightarrow\ 1-\frac{\alpha}{2} = 97\% \ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2} = 3\% \Rightarrow\ \alpha = 6\% \ \Rightarrow\ 1-\alpha = 94\%$.

On attribue à l'intervalle $[1558.02\,€\,;\,1561.98\,€]$ du salaire mensuel net d'un artisan, un niveau de confiance $1-\alpha = 94\%$.

d) Intervalle de confiance de niveau $1-\alpha = 95\%$ de la variance du salaire mensuel net moyen d'un artisan :

Données : Artisans : $n_A = 61$; $\bar{x}_A = 1560$; $s_A^2 = 8^2$; $s_A^{*2} = \frac{n_A}{(n_A-1)} \times s_A^2 = 65.067 = 8.07^2$.

Conditions d'application du test : échantillon de grande taille $n_A = 61$ prélevé d'une population de variance inconnue.

Seuil de signification : $\alpha = 5\%$.

Niveau de confiance : $1-\alpha = 0.95 \ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2} = 0.025$ et $1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$.

La statistique de test : $\frac{(n_A-1)S_A^{*2}}{\sigma_A^2} \ \to\ \chi^2_{(n_A-1=60\,d.d.l.)}$

Valeurs tabulées du khi-deux à 60 degrés de liberté (cf. table du khi-deux) :

$$k_1 = \chi^2_{0.975\,;\,60} = 40.482 \quad \text{et} \quad k_2 = \chi^2_{0.025\,;\,60} = 83.298$$

On en déduit alors l'intervalle de confiance suivant pour la variance $\sigma_{n_A}^2$:

$$\frac{(n_A-1)s_{n_A}^{*2}}{k_2} \leq \sigma_A^2 \leq \frac{(n_A-1)s_{n_A}^{*2}}{k_1} \ \Rightarrow\ \frac{60\times 2.85^2}{83.298} \leq \sigma_A^2 \leq \frac{60\times 2.85^2}{40.482} \ \Rightarrow\ 46.87 \leq \sigma_A^2 \leq 96.44.$$

L'intervalle de confiance de niveau $1-\alpha = 95\%$ de la variance du salaire mensuel net d'un artisan :
$\sigma_A^2 \in [46.87\,;\,96.44]$.

On en déduit l'intervalle de confiance de niveau $1-\alpha = 95\%$ de l'écart-type du salaire mensuel net d'un artisan : $\sigma_A \in [6.85€\,;\,9.82€]$.

$9€ \in [6.85€\,;\,9.82€]$, on peut donc conclure que l'écart-type du salaire mensuel net d'un artisan n'est pas significativement différent de 9 €.

e) Peut-on conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que les variances des salaires nets moyens des artisans et des auto-entrepreneurs sont égales ? :

Étude de la variabilité des salaires mensuels nets - Comparaison de variances :

Conditions d'application du test : grands échantillons $n_A = 61$ et $n_{AE} = 51$ de variances inconnues.

Les données :

Artisans : $n_A = 61$; $\bar{x}_A = 1560$; $s_A^2 = 8^2$; $s_A^{*2} = \frac{n_A}{(n_A-1)} \times s_A^2 = 65.067 = 8.07^2$.

Auto-entrepreneurs : $n_{AE} = 51$; $\bar{x}_{AE} = 880$; $s_{AE}^2 = 10^2$; $s_{AE}^{*2} = \frac{n_{AE}}{(n_{AE}-1)} \times s_{AE}^2 = 102 = 10.10^2$.

Intervalle de confiance du rapport de deux variances :

Conditions d'application du test : grands échantillons indépendants provenant de deux populations normales de variances inconnues σ_A^2 et σ_{AE}^2.

La statistique de test : $\frac{\sigma_{AE}^2 s_A^{*2}}{\sigma_A^2 s_{AE}^{*2}} \rightarrow F_{(n_A-1=60\,;\,n_{AE}-1=50)}$

Les valeurs critiques (cf. table de Fisher) :

$f_2 = f_{(2.5\%\,,\,60\,,\,50)} = 1.721$; $f_1 = f_{(97.5\%\,,\,60\,,\,50)} = \frac{1}{f_{(2.5\%\,,\,50\,,\,60)}} = \frac{1}{1.699} = 0.5886.$

$$f_1 < \frac{\sigma_{AE}^2\, s_A^{*2}}{\sigma_A^2\, s_{AE}^{*2}} < f_2 \Leftrightarrow f_1 \frac{s_{AE}^{*2}}{s_A^{*2}} < \frac{\sigma_{AE}^2}{\sigma_A^2} < f_2 \frac{s_{AE}^{*2}}{s_A^{*2}} \Leftrightarrow 0.92 < \frac{\sigma_{AE}^2}{\sigma_A^2} < 2.70$$

$I.C._{95\%}$: Intervalle de confiance de niveau 95% de $\frac{\sigma_{AE}^2}{\sigma_A^2} \in [0.92\,;\,2.70]$.

Conclusion : $1 \in I.C._{95\%}$, on peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, qu'il n'y a pas de différence significative entre les variances des salaires mensuels nets des artisans et des auto-entrepreneurs. On peut donc les supposer comme égales $\sigma_A^2 = \sigma_{AE}^2$.

f) Peut-on conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que les salaires nets moyens des artisans et des auto-entrepreneurs sont différents ? :

Comparaison de deux moyennes : Intervalle de confiance de la différence de deux moyennes

Conditions d'application du test : grands échantillons $n_A = 61$ et $n_{AE} = 51$ de variances inconnues.

Les données :

Artisans : $n_A = 61$; $\bar{x}_A = 1560$; $s_A^2 = 8^2$; $s_A^{*2} = \frac{n_A}{(n_A-1)} \times s_A^2 = 65.067 = 8.07^2$.

Auto-entrepreneurs : $n_{AE} = 51$; $\bar{x}_{AE} = 880$; $s_{AE}^2 = 10^2$; $s_{AE}^{*2} = \frac{n_{AE}}{(n_{AE}-1)} \times s_{AE}^2 = 102 = 10.10^2$.

La statistique de test de la différence de deux moyennes grands échantillons, variances inconnues :

$$\frac{(\overline{X}_{n_A} - \overline{X}_{n_{AE}}) - (m_A - m_{AE})}{\sqrt{\frac{s_A^{*2}}{n_A} + \frac{s_{AE}^{*2}}{n_{AE}}}} \rightarrow N(0\,;\,1)$$

Les valeurs critiques (cf. table N(0 ; 1) avec $\alpha = 5\%$: $u_{2.5\%} = \pm 1.96$.

Marge d'erreur : $E = u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_A^{*2}}{n_A} + \frac{s_{AE}^{*2}}{n_{AE}}} = 3.43$

Ecart observé des salaires mensuels : $(\bar{x}_A - \bar{x}_{AE}) = 14.51 - 14.40 = 680$ €.

$I.C._{95\%}$: Intervalle de confiance de niveau 95% de la différence des salaires mensuels nets moyens :

$$(m_A - m_{AE}) \in [676.57€\,;\,683.43€].$$

Conclusion : $0 \notin I.C._{95\%}$, on peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, qu'il y a une différence significative entre les salaires moyennes des artisans et auto-entrepreneurs. On peut les supposer comme différents $m_A \neq m_{AE}$.

*************** °°° ***************

Exercice 2 : **(Barème de notation : a) 2 pts b) 1.5 pt c) 1.5 pt d) 1.5 pt e) 2.5 pts = 9 pts)**

Groupe	Assemblée Nationale 577 Députés (D)	Sénat 348 Sénateurs (S)
Taille de l'échantillon prélevé	35	40
Composition de la CMP	7	7

a) Intervalle de confiance de niveau $1-\alpha = 95\%$ de la proportion de sénateurs de la CMP :

Conditions d'application : échantillon aléatoire $n_S = 40$ de grande taille.
$\widehat{p}_S = \frac{7}{40} = 17.50\%$: estimation ponctuelle de la proportion de sénateurs de la CMP.
Population finie des 348 sénateurs : taux de sondage $t = \frac{n_S}{N_S} = 11.50\% (> 10\%)$.
Facteur de correction : $\frac{N_S - n_S}{N_s - 1} = 0.8876 \neq 1$
La statistique de test : $\frac{\widehat{p}_S - p_S}{\sqrt{\frac{p_S \times q_S}{n_S} + \frac{N_S - n_S}{N_s - 1}}} \rightarrow N(0\ ,\ 1)$
Risque d'erreur : $\alpha = 5\%$; $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ table N(0 , 1).
Marge d'erreur : $E = u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\widehat{p}_S \times \widehat{q}_S}{n_S} + \frac{N_S - n_S}{N_s - 1}} = 1.96 \sqrt{\frac{0.1750 \times 0.8250 \times 0.8876}{40}} = 11.03\%$
$I.C._{95\%}$ de la proportion de sénateurs de la CMP : $p_S \in [6.47\%\ ;\ 28.53\%]$.

Conclusion : $29\% \notin [6.47\%\ ;\ 28.53\%]$. On peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que la proportion de sénateurs de la CMP est significativement différente de 29%.

b) Intervalle de confiance de niveau $1-\alpha = 95\%$ de la proportion de députés de la CMP :

Conditions d'application : échantillon aléatoire $n_D = 35$ de grande taille.
$\widehat{p}_D = \frac{7}{35} = 20\%$: estimation ponctuelle de la proportion de députés de la CMP.
Population finie des 577 députés : taux de sondage $t = \frac{n_D}{N_D} = \frac{35}{577} = 6.07 (< 10\%)$.
Facteur de correction : $\frac{N_D - n_D}{N_D - 1} = 0.941 \simeq 1$
La statistique de test : $\frac{\widehat{p}_D - p_D}{\sqrt{\frac{p_D \times q_D}{n_D}}} \rightarrow N(0\ ,\ 1)$
Risque d'erreur : $\alpha = 5\%$; $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ table N(0 , 1).
Marge d'erreur : $E = u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\widehat{p}_D \times \widehat{q}_D}{n_D}} = 1.96 \sqrt{\frac{0.20 \times 0.80}{35}} = 13.25\%$
$I.C._{95\%}$ de la proportion de députés de la CMP : $p_D \in [6.75\%\ ;\ 33.25\%]$.

Conclusion : $30\% \in [6.75\%\ ;\ 33.25\%]$, on peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que la proportion de députés de la CMP n'est pas significativement différente de 30%.

c) Taille d'échantillon requise pour estimer la proportion de députés de la commission mixte paritaire, avec une marge d'erreur au plus égale à 8%, avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$:

Risque d'erreur : $\alpha = 5\% \Rightarrow u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ table N(0 , 1)
On cherche la taille d'échantillon n_D^* telle que la marge d'erreur :

$$E^* = u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\widehat{p}_D \widehat{q}_D}{n_D^*}} \leq 0.08 \Rightarrow n_D^* \geq \left(\frac{u_{\frac{\alpha}{2}}}{0.08}\right)^2 \widehat{p}_D \widehat{q}_D$$
$$\Rightarrow n_D^* \geq \left(\frac{1.96}{0.08}\right)^2 0.20 \times 0.80 \Rightarrow n_D^* \geq 96.04 \Rightarrow n_D^* \geq 97 \text{ députés.}$$

d) Niveau de confiance que l'on attribue à cet intervalle de confiance $[7.28\% ; 32.72\%]$ bilatéral symétrique de la proportion de députés de la CMP, obtenu à partir d'un échantillon de taille 35 ? :

Marge d'erreur : $E = \frac{Longueur\,de\,l'intervalle}{2} = \frac{32.72\% - 7.28\%}{2} = 12.72\%$

$$\Rightarrow\ u_{\frac{\alpha}{2}} = E \times \sqrt{\frac{n_D}{\widehat{p}_D \times \widehat{q}_D}} = 0.1272 \times \sqrt{\frac{35}{0.2 \times 0.8}} = 1.881$$

cf. table N(0 , 1), $P(U \leq 1.881) = \Phi(1.881) = 0.97$

$$\Rightarrow\ 1 - \frac{\alpha}{2} = 97\% \ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2} = 3\% \ \Rightarrow\ \alpha = 6\% \ \Rightarrow\ 1 - \alpha = 94\%.$$

On attribue à l'intervalle $[7.28\% ; 32.72\%]$ de la proportion de députés de la CMP, un niveau de confiance $1 - \alpha = 94\%$.

e) Peut-on conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que les proportions de députés et de sénateurs de la CMP sont différentes ? :

Intervalle de confiance de la différence de deux proportions :

Conditions d'application du test : échantillons indépendants provenant de deux populations normales - Grands échantillons $n_D = 35$ et $n_S = 40$.

La statistique de test : $$\frac{(\widehat{P}_D - \widehat{P}_D) - (p_D - p_S)}{\sqrt{\frac{p_D q_D}{n_D} + \frac{p_S q_S}{n_S}\frac{(N_S - n_S)}{(N_S - 1)}}} \rightarrow N(0\,,\,1)$$

Députés : $n_D = 35$; $\widehat{p}_D = \frac{7}{35} = 20\%$

Sénateurs : $n_S = 40$; $\widehat{p}_S = \frac{7}{40} = 17.50\%$

Population finie des 348 sénateurs : taux de sondage $t = \frac{n_S}{N_S} = 11.50\%$ $(> 10\%)$.

Facteur de correction : $\frac{N_S - n_S}{N_s - 1} = 0.8876 \neq 1$

Ecart observé : $\widehat{p}_D - \widehat{p}_S = 20\% - 17.50\% = 2.50\%$

Risque d'erreur : $\alpha = 5\% \ \Rightarrow\ u_{2.5\%} = \pm 1.96$ cf. table N(0 , 1)

Marge d'erreur $E = u_{\alpha=2.5\%}\sqrt{\frac{\widehat{p}_D \widehat{q}_D}{n_D} + \frac{\widehat{p}_S \widehat{q}_S}{n_S}\frac{(N_S - n_S)}{N_S - 1}} = 1.96\sqrt{\frac{0.2 \times 0.80}{35} + \frac{0.175 \times 0.825}{40} \times 0.8876} = 17.28\%$

$I.C._{95\%}$: de la différence des proportions : $(p_D - p_S) \in [-14.78\% ; 19.78\%]$.

Conclusion : puisque $0 \in I.C_{95\%} = [-14.78\% ; 19.78\%]$, on peut conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que la différence observée $(\widehat{p}_D - \widehat{p}_S) = 2.50\%$ n'est pas significative, les proportions de députés et sénateurs de la CMP ne sont pas significativement différentes.

*************** °°° ***************