

L3 - Economie & Gestion

Statistique Inférentielle

Corrigé du Contrôle Continu n°2

Durée 1h30 - Année universitaire 2023 - 2024

Exercice 1 : (Barème de notation : a) 1 pts b) 1.5 pt c) 3 pts d) 2 pts e) 2.5 pts = 10 pts)

Type Moteur	Catégorie de voiture		Total
	Tourisme	Utilitaire	
Thermique	60	50	110
Hybride	50	10	60
Electrique	60	20	80
Total	170	80	250

a) Proportions - Profils-ligne & Profils-colonnes :

- $\frac{80}{250} = 32\%$ des voitures vendues sont de type Eléctrique.
- $\frac{10}{250} = 4\%$ des voitures vendues sont des Utilitaires Hybrides.
- $\frac{60}{80} = 75\%$ des voitures Electriques sont des voitures de catégorie Tourisme.
- $\frac{50}{80} = 62.50\%$ des voitures Utilitaires sont des voitures de type Thermique.

b) Test d'une proportion à une valeur donnée :

Conditions d'application : échantillon aléatoire $n = 250$ (grand échantillon).

$\hat{p}_E = \frac{80}{250} = 32\%$ (estimation ponctuelle) ; Risque d'erreur $\alpha = 5\%$.

La statistique de test : $\frac{\hat{p}_E - p_E}{\sqrt{\frac{p_E \times q_E}{n}}} \rightarrow N(0, 1)$

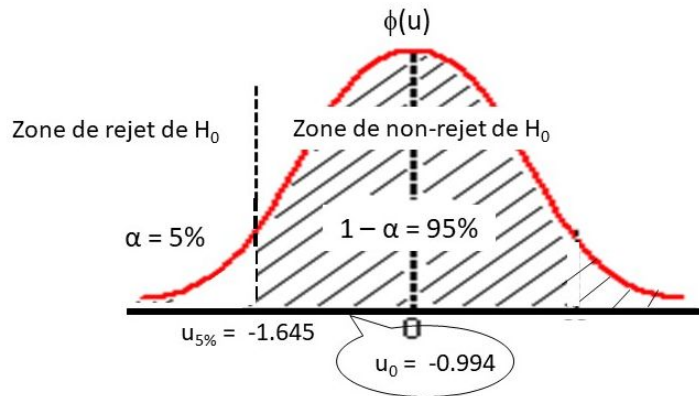
Hypothèses statistiques : Test Unilatéral risque à gauche

$$\begin{cases} H_0 : p_E \geq 35\% \\ H_1 : p_E < 35\% \text{ la proportion de voitures électriques vendues est inférieure à } 35\% \end{cases}$$

Risque d'erreur : $\alpha = 5\%$; $u_\alpha = -1.645$ table $N(0, 1)$.

Valeur de la statistique de test sous $H_0 : p_E = 35\%$

$$u_0 = \frac{\hat{p}_E - p_E}{\sqrt{\frac{p_E \times q_E}{n}}} = \frac{0.32 - 0.35}{\sqrt{\frac{0.35 \times 0.65}{250}}} = -0.994$$



Règle de décision et conclusion : puisque $u_0 = -0.994 > u_{5\%} = -1.645$ alors non-rejet de l'hypothèse nulle H_0 . Il n'y a pas de différence significative au seuil $\alpha = 5\%$. On peut donc conclure que la proportion de voitures Electriques vendues n'est pas significativement inférieure à 35%.

c) Test d'indépendance du Khi2 :

Type Moteur	Catégorie de voiture			Total
	Tourisme	Utilitaire	Total	
Thermique	60 74.80	50 35.20	110	110
Hybride	50 40.80	10 19.20	60	60
Electrique	60 54.40	20 25.60	80	80
Total	170	80	250	250

Tableau des effectifs Observés et **théoriques**

Test du khi-deux d'Indépendance

Hypothèses statistiques :

- $\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \text{le type de motorisation est indépendant de la catégorie de la voiture} \\ H_1 : \text{Le type de motorisation dépend de la catégorie de la voiture} \end{array} \right.$

Seuil de signification : $\alpha = 5\%$.

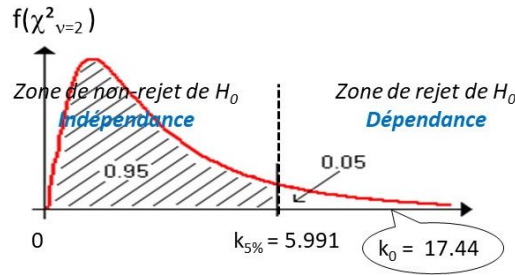
Le nombre de degrés de liberté : $\nu = (l - 1)(c - 1) = (3 - 1)(2 - 1) = 2 \text{ d.d.l.}$

Valeur critique : $\chi^2_{\alpha=5\%, 2 \text{ d.d.l.}} = 5.991$ cf. table du khi-deux à 2 d.d.l.

Calcul de la statistique de test sous l'hypothèse nulle H_0 d'indépendance :

$$k_0 = \frac{(60-74.80)^2}{74.80} + \frac{(50-35.20)^2}{35.20} + \frac{(10-19.20)^2}{19.20} + \dots + \frac{(20-25.60)^2}{25.60} = 17.44$$

Règle de décision et conclusion : puisque $k_0 = 17.44 > \chi^2_{5\%} = 5.991$ alors rejet de l'hypothèse nulle H_0 . Il y a une différence significative au seuil $\alpha = 5\%$ entre les répartitions observée et théorique. On peut donc conclure que le type de motorisation dépend de la catégorie de la voiture ; ces deux caractéristiques sont liées.



d) Hypothèse émise - Comparaison de deux proportions :

Estimations des proportions de voitures Electriques et hybrides de tourisme vendues :

Proportion de voitures Electriques de Tourisme : $\hat{p}_{ET} = \frac{60}{170} = 35.29\%$

Proportion de voitures Hybrides de Tourisme : $\hat{p}_{HT} = \frac{50}{170} = 29.41\%$

Hypothèses statistiques - Test unilatéral risque à droite

$$\begin{cases} H_0 : p_{ET} - p_{HT} \leq 0 \\ H_1 : p_{ET} - p_{HT} > 0 \Leftrightarrow p_{ET} > p_{HT} \text{ plus d'Electriques de tourisme que d'Hybrides de tourisme} \end{cases}$$

Seuil de signification : $\alpha = 5\%$

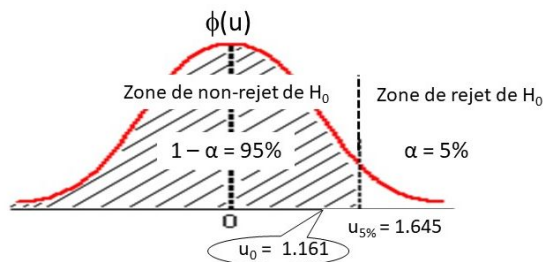
Conditions d'application du test : échantillon de grande taille $n_T = 170 (\geq 30)$.

Statistique de test : $\frac{(\hat{P}_{ET} - \hat{P}_{HT}) - (p_{ET} - p_{HT})}{\sqrt{\frac{p_{ET}q_{ET}}{n_T} + \frac{p_{HT}q_{HT}}{n_T}}} \rightarrow N(0; 1)$

Valeur critique : $u_{\alpha=5\%} = 1.645$ cf. table $N(0, 1)$, pour un test unilatéral risque à droite.

Valeur u_0 de la statistique de test sous l'hypothèse nulle H_0 d'égalité des proportions : $p_{ET} = p_{HT}$

$$u_0 = \frac{(0.3529 - 0.2941)}{\sqrt{\frac{0.3529 \times 0.6471}{170} + \frac{0.2941 \times 0.7059}{170}}} = 1.161$$



Conclusion : puisque $u_0 = 1.1611 < u_{\alpha=5\%} = 1.645$, alors non-rejet de l'hypothèse nulle H_0 . Au seuil de signification $\alpha = 5\%$, les résultats ne confirment pas l'hypothèse émise par le responsable des ventes. La concession n'a pas vendu plus de voitures Electriques de tourisme que de voitures hybrides de tourisme.

e) Répartition uniforme des ventes selon les motorisations :

Motorisation	Essence	Diesel	Hybride	Electrique	Total
Effectifs - ventes observées : O_i	55	45	70	50	220
Répartition uniforme	25%	25%	25%	25%	100%
Effectifs théoriques T_i	55	55	55	55	220

Test du khi-deux d'ajustement à une distribution uniforme

Les hypothèses statistiques :

- $$\begin{cases} H_0 : \text{les ventes se répartissent de façon uniforme selon les 4 motorisations} \\ H_1 : \text{les ventes ne se répartissent pas de façon uniforme selon les 4 motorisations} \end{cases}$$

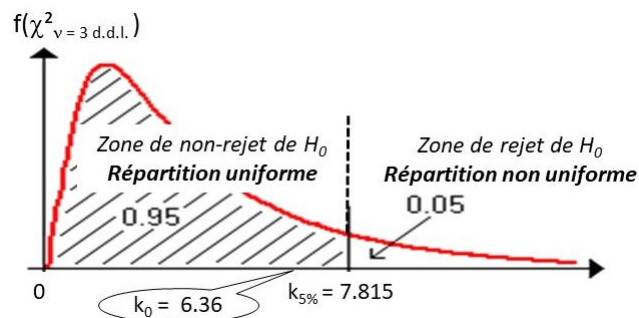
$p = 4$ modalités - motorisations, la distribution uniforme est complètement spécifiée, aucun paramètre à estimer : $r = 0$.

Statistique de test : $\sum_{i=1}^{p=4} \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i} \rightarrow \chi^2_{p-1-r=3 d.d.l.}$

Seuil de signification : $\alpha = 5\%$, valeur critique : $\chi^2_{\alpha=5\%, 3 d.d.l.} = 7.815$ cf. table du khi-deux à 3 d.d.l.

Statistique de test sous H_0 - répartition uniforme des ventes selon les motorisations :

$$k_0 = \frac{(55-55)^2}{55} + \frac{(45-55)^2}{55} + \frac{(70-55)^2}{55} + \frac{(50-55)^2}{55} = 6.36$$



Conclusion : puisque $k_0 = 6.36 < k_{\alpha=5\%} = 7.815$, appartient à la zone de non-rejet de l'hypothèse nulle H_0 . On peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$ que les ventes de Renault Mégane du concessionnaire sont distribuées selon une loi uniforme selon les 4 motorisations.

***** ○○○ *****

Exercice 2 : (Barème de notation : a) 1.5 pt b) 1.5 pt c) 2 pts d) 2.5 pts e) 2.5 pts = 10 pts)

Type de voiture	E-Tech 100% Electrique	
	Renault Mégane	Peugeot 308
Nombre de voitures	35	35
Autonomie moyenne observée (Km)	470	465
Ecart-type observé de l'autonomie (Km)	5	4

a) Test unilatéral risque à gauche d'une moyenne à une valeur donnée 500 Km:

Données de la Renault Mégane : $n_R = 35$; $\bar{x}_R = 470$; $s_R^2 = 5^2$; $s_R^{*2} = \frac{n_R}{n_R-1} s_R^2 = 5.22^2$

Hypothèses statistiques - Test bilatéral symétrique

$$\begin{cases} H_0 : m_R \geq 500 \\ H_1 : m_R < 500 \text{ Km} \end{cases} \quad \text{l'autonomie moyenne de la Renault-Mégane est inférieure à 500 Km}$$

Statistique de test : $\frac{\bar{X}_{35} - m}{\frac{s_R^*}{\sqrt{n_R}}} \rightarrow T_{n-1=34} \text{ d.d.l.}$

Seuil de signification : $\alpha = 5\%$, $1 - \alpha = 95\% \Rightarrow t_{\alpha=5\%} = -1.691$ cf. table loi de Student.

Calcul de t_0 , la valeur de la statistique de test sous l'hypothèse nulle $H_0 : m_R = 500$:

$$t_0 = \frac{\bar{x}_R - m}{\frac{s_R^*}{\sqrt{n_R}}} = \frac{\bar{x}_R - m}{\frac{s_R}{\sqrt{(n_R-1)}}} = \frac{470-500}{\frac{5}{\sqrt{34}}} = -6\sqrt{34} = -34.99$$

Conclusion : $t_0 = -34.99 < -1.691$, t_0 appartient à la zone de rejet de H_0 , on peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, qu'il y a une différence significative, l'autonomie moyenne de la Renault-Mégane est inférieure à 500 Km.

b) Test de la variance ou de l'écart-type à une valeur donnée :

Données de la Peugeot 308 : $n_P = 35$, $s_P = 4$, $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 5\%$.

La statistique de test : $\frac{(n_P-1)s_P^{*2}}{\sigma_P^2} \rightarrow \chi_{(n_P-1=34)}^2 \text{ d.d.l.}$

Test Unilatéral risque à gauche d'une variance à une valeur donnée :

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_P^2 \geq \sigma_0^2 = 5^2 \\ H_1 : \sigma_P^2 < \sigma_0^2 = 5^2 \Leftrightarrow \text{la variance est inférieure à 25} \end{cases}$$

Seuil de signification : $\alpha = 5\%$.

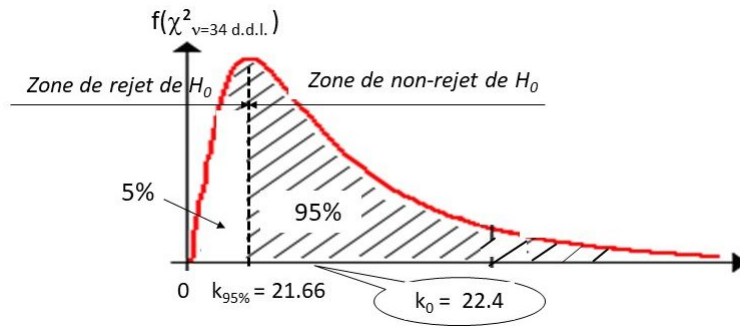
Valeur tabulée du khi-deux à 34 d.d.l., risque $\alpha = 5\%$ à gauche. (cf. table du khi-deux) :

$$k = \chi_{0.95; 34}^2 = 21.664$$

Statistique de test sous l'hypothèse nulle $H_0 : \sigma_P^2 = \sigma_0^2 = 5^2 = 25$

$$k_0 = \frac{(n_p - 1)s_p^{*2}}{\sigma_0^2} = \frac{n_p s_p^2}{\sigma_0^2}$$

$$= \frac{35 \times 4^2}{25} = 22.4$$



Conclusion : vu que $k_0 = 22.4 > k = 21.66$, la valeur k_0 appartient à la zone de non-rejet de H_0 . On peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que la variance n'est pas significativement inférieure à 5^2 . Par conséquent, l'écart-type σ_P de l'autonomie de la Peugeot 805 n'est pas significativement inférieur à 5 Km.

c) Comparaison de 2 moyennes :

Conditions d'application du test : échantillons indépendants de deux populations normales de variances inconnues mais de grandes tailles $n_R = n_P = 35 (> 30)$.

Statistique de test : $\frac{(\bar{X}_R - \bar{X}_P) - (m_R - m_P)}{\sqrt{\frac{s_R^{*2}}{n_R} + \frac{s_P^{*2}}{n_P}}} \rightarrow N(0; 1)$

Seuil de signification : $\alpha = 5\%$.

Différence des moyennes observées : $(\bar{x}_R - \bar{x}_P) = 470 - 465 = 5$

Hypothèses statistiques - Test unilatéral risque à droite

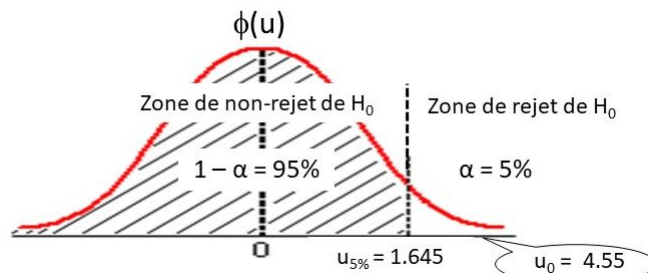
$$\begin{cases} H_0 : m_R \leq m_P = 0 \\ H_1 : m_R - m_P > 0 \Leftrightarrow m_R > m_P \end{cases} \begin{array}{l} \text{l'autonomie moyenne de la Renault Mégane est supérieure} \\ \text{à celle de la Peugeot 308} \end{array}$$

Pour $\alpha = 5\%$ valeur critique de la loi Normale : $u_{\alpha=5\%} = 1.645$.

Valeur u_0 de la statistique de test sous l'hypothèse nulle $H_0 : m_R = m_P$:

$$u_0 = \frac{(\bar{x}_R - \bar{x}_P)}{\sqrt{\frac{s_R^{*2}}{n_R} + \frac{s_P^{*2}}{n_P}}}$$

$$= \frac{(\bar{x}_R - \bar{x}_P)}{\sqrt{\frac{s_R^2}{n_R - 1} + \frac{s_P^2}{n_P - 1}}} = \frac{5}{1.098} = 4.55$$



Conclusion : $u_0 = 4.55 > u_{5\%} = 1.645$, u_0 appartient à la zone de rejet de H_0 , on peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, qu'il y a une différence significative, l'autonomie moyenne de la voiture électrique Renault est significativement supérieure à celle de la voiture électrique Peugeot.

d) Comparaison des distributions des autonomies des 2 marques de voitures électriques :

Rang-Autonomie Renault Mégane	3	2	8.5	1	11	14	12.5	15	$W_R = 67$
Autonomie (Km) de la Renault Mégane	448	430	455	410	460	470	465	480	
Autonomie (Km) de la Peugeot 308	450	450	453	465	458	450	455	490	
Rang-Autonomie Peugeot 308	5	5	7	12.5	10	5	8.5	16	$W_P = 69$

Test non paramétrique bilatéral de Wilcoxon - Echantillons indépendants

Hypothèses statistiques :

$$\begin{cases} H_0 : \text{les autonomies sont identiques} \\ H_1 : \text{les autonomies sont différentes} \end{cases}$$

Statistique de test de Wilcoxon - Echantillons indépendants :

$$W_R = \sum_{i=1}^{m=8} Rg_i^R = 67 \quad \text{et} \quad W_P = \sum_{j=1}^{n=8} Rg_j^P = 69.$$

Valeur critique cf. table de Wilcoxon - Echantillons indépendants : $m = 8$; $w^* = 3$.

Conclusion : la statistique de test sous l'hypothèse H_0 de l'échantillon de taille $m = n = 8$: $W_R = 67 > w^* = 3$, alors non-rejet de l'hypothèse nulle H_0 . On peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que les distributions des autonomies des deux marques de voitures électriques ne sont pas significativement différentes.

e) Comparaison des distributions des autonomies Essence - Electrique :

Test non paramétrique de Wilcoxon - Echantillons dépendants

Hypothèses statistiques : test bilatéral symétrique

$$\begin{cases} H_0 : \text{les 2 distributions d'autonomies sont identiques} \\ H_1 : \text{les 2 distributions d'autonomies sont différentes} \end{cases}$$

Renault Mégane Hybride	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Autonomie Essence (Km)	80	75	50	40	70	45	60	55	60
Autonomie Electrique (Km)	20	25	50	60	30	55	40	45	40
Différence d_i (Km)	60	50	0	-20	40	-10	20	10	20
Rang $ d_i $ (Km)	8	7		4	6	1.5	4	1.5	4

Remarques : - La différence de la voiture numéro 3 est nulle, ce couple d'observations est supprimé, il reste donc $n = 8$ couples

$$\text{- Pour } n = 8 ; T^+ = 30.5 ; T^- = 5.5 ; T = T^+ + T^- = \frac{n(n+1)}{2} = 36.$$

Valeur critique pour $n = 8$ et $\alpha = 5\%$, test bilatéral symétrique : $T_\alpha^* = 3$ (cf. table Wilcoxon échantillons appariés.) $T = \min(T^+; T^-) = \min(30.5; 5.5) = 5.5 > T_\alpha^* = 3$) Non Rejet de H_0 . On peut donc considérer avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$ que les deux autonomies Essence et Electrique ne sont pas significativement différentes.
