UFR de Sciences économiques et de Gestion

UNIVERSITÉ DE LYON

L3S6 - Economie Gestion

Statistique Inférentielle

Corrigé du Contrôle Continu n°2 : 2025 - 2026 - Durée 1h 30

Exercice 1 : **(Barème de notation : a) 2.5 pts b) 2.5 pts c) 2.5 pts d) 2.5 pts = 10 pts)**

	Homme	Femme
Taille de l'échantillon	100	100
Montant moyen observé du capital investi M.€.	17.60	16.40
Ecart-type observé du montant du capital investi M.€.	9.20	9.10

a) Variance du montant investi par les hommes est-il supérieur à $81(M.€.)^2$:

Conditions d'application du test : grand échantillon $n_H = 100$, variance inconnue.

Seuil de signification : $\alpha = 5\%$.

Hommes : $n_H = 100$; $\bar{x}_H = 17.60$; $s_H^2 = 9.20^2 = 84.64$

Test paramétrique

Hypothèses statistiques - Test Unilatéral risque à droite, de la variance à une valeur donnée.

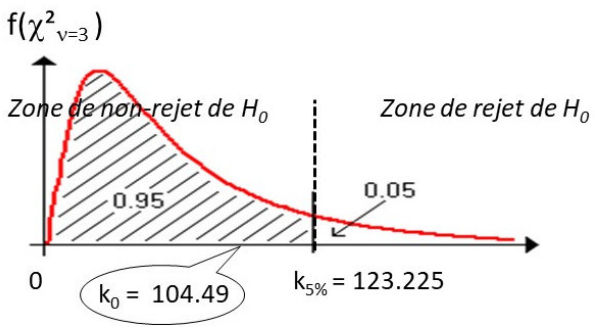
$$\begin{cases} H_0 : \sigma_H^2 \leq 81 \\ H_1 : \sigma_H^2 > 81 \end{cases}$$

La statistique de test : $\frac{(n_H-1)S_H^{*2}}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{(n_H-1=99\ d.d.l.)}$

Valeur du khi-deux à 99 d.d.l., cf. table du khi-deux : $k = \chi^2_{0.95\,;\,99} = 123.225$

Valeur de la statistique de test sous H_0 : $\sigma_H^2 \leq 81$:

$$k_0 = \frac{(n_H-1)S_H^{*2}}{\sigma^2} = \frac{(n_H)S_H^2}{\sigma^2} = \frac{(100*84.64)}{81} = 104.49$$



Conclusion : $k_0 = 104.49$ appartient à la zone de non-rejet de H_0, on peut donc conclure que la variance du montant investi par les hommes n'est pas significativement supérieure à $9^2 = 81(M.€.)^2$.

b) Le montant moyen investi par les hommes est-il significativement inférieur à $18M.€$?

Statistique de test : $\dfrac{(\overline{X}_H - m_H)}{\frac{s^*_H}{\sqrt{n_H}}} \rightarrow T_{n_H-1=99\,d.d.l.}$

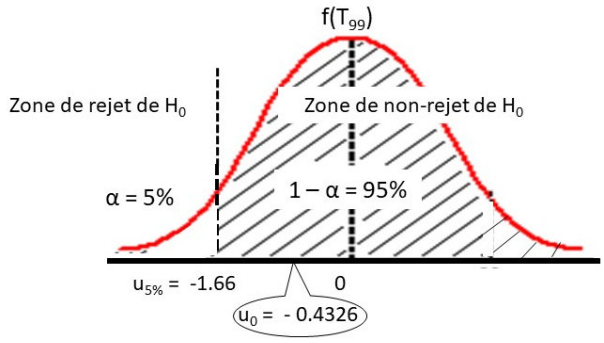
Valeur critique de Student à $\nu = n_H - 1 = 99\,d.d.l.$: $t_{\alpha=5\%} = 1.66$.

Hypothèses statistiques - Test Unilatéral risque à gauche, de la moyenne à une valeur donnée.

$$\begin{cases} \text{H}_0 : m_H \geq 18 \\ \text{H}_1 : m_H < 18 \end{cases}$$

Valeur de la statistique de test sous H_0 : $m_H = 18M.€.$:

$t_0 = \dfrac{(\overline{X}_H - m_H)}{\frac{s^*_H}{\sqrt{n_H}}} = \dfrac{(\overline{X}_H - m_H)}{\frac{s_H}{\sqrt{n_H - 1}}} = \dfrac{17.60-18}{\frac{9.20}{\sqrt{99}}} = -0.4326.$



Conclusion : la valeur de la statistique de test sous H_0 : $t_0 = -0.4326$ appartient à la zone de non-rejet de H_0, on peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que le montant moyen investi par les hommes n'est pas significativement inférieur à $18M.€$..

c) Comparaison de deux moyennes :

Conditions d'application du test :

grands échantillons $n_H = n_F = 100\,(> 30)$ indépendants provenant de deux populations normales de variances inconnues.

Homme : $n_H = 100$; $\bar{x}_H = 17.60M.€.$; $s_H^2 = 9.20^2$; $s_H^{*2} = \frac{n_H}{(n_H-1)} \times s_H^2 = \frac{100}{99} \times 9.20^2 = 85.49 = 9.24^2$

Femme : $n_F = 100$; $\bar{x}_F = 16.40M.€.$; $s_F^2 = 9.10^2$; $s_F^{*2} = \frac{n_{100}}{(n_{100}-1)} \times s_F^2 = \frac{100}{99} \times 9.10^2 = 83.65 = 9.15^2$

La statistique de test : $\dfrac{(\overline{X}_H - \overline{X}_F) - (m_H - m_F)}{\sqrt{\frac{s_H^{*2}}{n_H} + \frac{s_F^{*2}}{n_F}}} \rightarrow N(0\,;\,1)$

Hypothèses statistiques - Test Unilatéral risque à droite

$$\begin{cases} \text{H}_0 : m_H - m_F \leq 0 \Leftrightarrow m_H \leq m_F \\ \text{H}_1 : m_H - m_F > 0 \Leftrightarrow m_H > m_F \quad \text{les montants investis sont plus importants chez les hommes que chez les femmes} \end{cases}$$

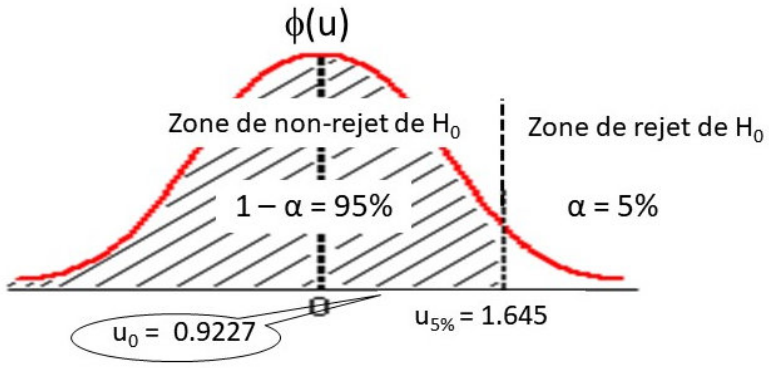
Seuil de signification : $\alpha = 5\%$.

Ecart observé des montants du capital investi : $(\bar{x}_H - \bar{x}_F) = 17.60 - 16.40 = 1.2M.€.$

Statistique de test sous l'hypothèse nulle H_0 : $m_H \leq m_F$:

$$u_0 = \frac{(\bar{x}_H - \bar{x}_F)}{\sqrt{\frac{s^{*2}_H}{n_H} + \frac{s^{*2}_F}{n_F}}} = \frac{1.2}{\sqrt{\frac{85.49}{100} + \frac{83.65}{100}}} = 0.9227$$

La valeur critique (cf. table N(0 , 1)) : $\alpha = 5\%$; $u_{\alpha=5\%} = 1.645$.



Conclusion : vu que $u_0 = 0.9227 < u_{\alpha=5\%} = 1.645$ alors Non-rejet de l'hypothèse nulle H_0. On peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que les montants moyens du capital investis par les hommes ne sont pas significativement supérieurs à ceux investis par les femmes. L'écart observé de 1.2 M.€. n'est pas significatif, il est dû aux fluctuations d'échantillonnage.

d) Comparaison des distributions des montants du capital investis par les entrepreneuses et les entrepreneurs :

Rangs-F	3	9	14	17	5	9	12	7			$W_F = \sum Rangs - F = 76$
$m = 8$ F - Entrepreneuses	5	12	25	34	8	12	24	11			
$n = 10$ H - Entrepreneurs	32	5	5	18	25	10	35	12	25	4	
Rangs-H	16	3	3	11	14	6	18	9	14	1	$W_H = \sum Rangs - H = 95$

Test non paramétrique bilatéral symétrique de Wilcoxon - Echantillons indépendants

Hypothèses statistiques :

$\begin{cases} H_0 : \text{les distributions des montants du capital investis par les entrepreneuses et les entrepreneurs sont identiques} \\ H_1 : \text{les distributions des montants du capital investis par les entrepreneuses et les entrepreneurs sont différents} \end{cases}$

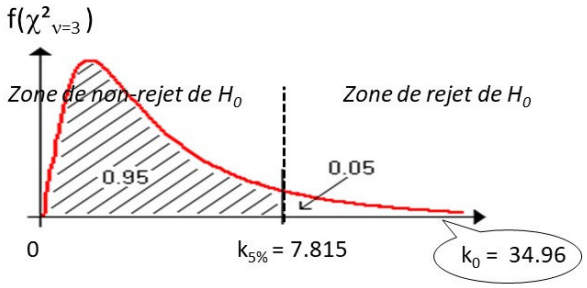
Statistique de test de Wilcoxon - Echantillons indépendants :

$$W_F = \sum_{i=1}^{m=8} rang_i^F = 76 \quad \text{et} \quad W_H = \sum_{j=1}^{n=10} rang_i^H = 95.$$

Valeur critique cf. table de Wilcoxon - Echantillons indépendants : $w^* = 3$.

Conclusion : La statistique de test sous l'hypothèse nulle H_0 du plus petit échantillon $m = 8$: $W_F = 76 > w^* = 3$, alors Non-Rejet de l'hypothèse nulle H_0. On peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que les distributions des montants du capital investis par les entrepreneuses et les entrepreneurs ne sont pas différentes.

********** ○○○ **********



Exercice 2 : **(Barème de notation : a) 2.5 pts b) 2.25 pts c) 2.25 pts d) 3 pts = 10 pts)**

a) Test d'ajustement à une loi de probabilité uniforme discrète :

Secteurs d'activité	Industrie	Construction	Commerce-Transport Hébergement-Restauration	Services aux ménages et aux entreprises	Total
Nombre d'entreprises créées O_i	102	73	115	160	450
Répartition uniforme	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
Effectif théorique T_i	112.5	112.5	112.5	112.5	450

Répartition uniforme des entreprises créées selon les secteurs d'activité :
Hypothèses statistiques - Test unilatéral risque à droite

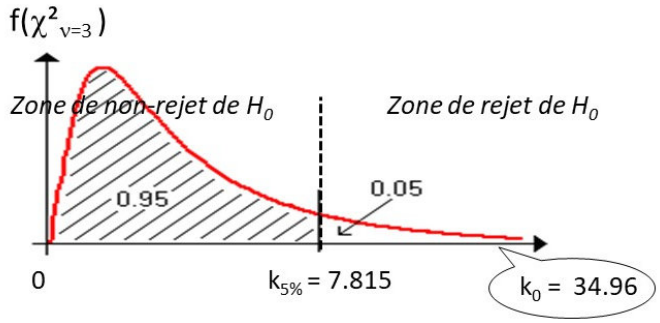
$$\begin{cases} H_0 : \text{la répartition des entreprises créées est uniforme selon le secteur d'activité} \\ H_1 : \text{la répartition des entreprises crées n'est pas uniforme selon le secteur d'activité} \end{cases}$$

Seuil de signification : $\alpha = 5\%$; $k = 4$ secteurs d'activité ; $\nu = (k-1) - r = 3$ *d.d.l.* avec $r = 0$.

Calcul de la statistique de test sous H_0 :

$$k_0 = \sum_{i=1}^{k=4} \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i} = \frac{(102-112.5)^2}{112.5} + \cdots + \frac{(160-112.5)^2}{112.5} = 34.96$$

Pour $\alpha = 5\%$, $Proba\,(\chi^2_{3\,d.d.l.} \leq k_{5\%}) = 0.95 \Rightarrow k_{5\%} = 7.815$



Règle de décision et conclusion : la valeur k_0 de la statistique de test sous H_0, $k_0 = 34.96 > k_{5\%\,;\,3\,d.d.l.} = 7.815$ est dans la zone de rejet de H_0. On peut donc conclure avec un risque d'erreur

$\alpha = 5\%$ que les entreprises crées en 2024 ne se répartissent pas de façon uniforme selon les secteurs d'activité.

b) La proportion d'entreprises industrielles est-elle plus petite que 25% ?

Hypothèses statistiques - Test Unilatéral risque à gauche

Test Unilatéral d'une proportion à une valeur donnée $p_0 = 25\%$.

Hypothèses statistiques : Test unilatéral risque à gauche

$$\begin{cases} H_0 : p_I \geq p_0 = 25\% \\ H_1 : p_I < p_0 = 25\% \end{cases}$$ la proportion d'entreprises industrielles est inférieure à 25%.

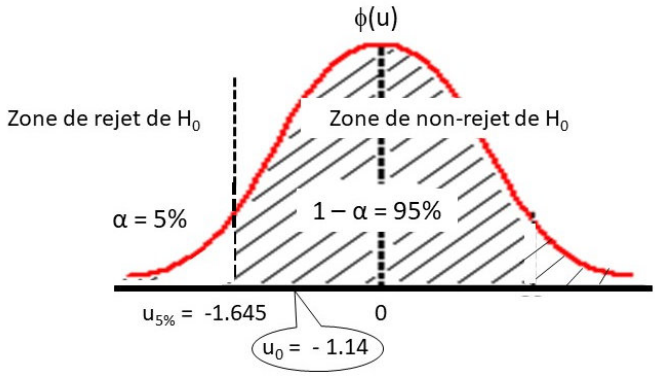
Conditions d'application : grand échantillon de taille $n = 450$ et $\widehat{p}_I = \frac{102}{450} = 22.67\%$.

La statistique de test : $\frac{\widehat{p}_I - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \rightarrow N(0,1)$

Valeur de la statistique de test sous l'hypothèse nulle $H_0 : p = p_0 = 0.25$:

$$u_0 = \frac{\widehat{P}_I - P_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{(0.2267 - 0.25)}{\sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{450}}} = -1.14.$$

Fractile de la loi normale : $\alpha = 5\%$; $u_{5\%} = -1.645$, cf. table N(0 , 1).



Conclusion : puisque $u_{5\%} = -1.645 < u_0 = -1.14$ on ne rejette pas l'hypothèse nulle H_0. La différence observée $(\widehat{p}_I - p_0) = -2.33\%$ n'est pas significative. On peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que la proportion d'entreprise industrielles créées n'est pas significativement inférieure à 25%.

c) Les hommes ont-ils plus créés dans le secteur de l'industrie que les femmes ?

Test de comparaison de 2 proportions :

Hypothèses statistiques : Test unilatéral risque à droite

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \mathrm{P}_H \leq P_F \\ \mathrm{H}_1 : \mathrm{P}_H > P_F \end{cases}$$

Conditions d'application du test : échantillons indépendants provenant de deux populations normales - Grands échantillons $n_H = 240$ et $n_F = 210$.

La statistique de test : $\dfrac{(\widehat{P}_H - \widehat{P}_F) - (p_H - p_F)}{\sqrt{\frac{p_H q_H}{n_H} + \frac{p_F q_F}{n_F}}} \rightarrow N(0\ ,\ 1)$

Echantillon Industrie Homme : $n_H = 60$; $\widehat{p}_H = \frac{60}{240} = 25\%$

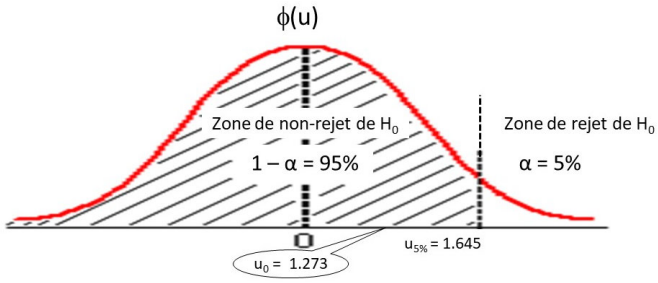
Echantillon Industrie Femme : $n_F = 42$; $\widehat{p}_F = \frac{42}{210} = 20\%$

Ecart observé : $\widehat{p}_H - \widehat{p}_F = 25\% - 20\% = 5\%$

Risque d'erreur : $\alpha = 5\% \Rightarrow u_{\alpha=5\%} = u_{5\%} = 1.645$ cf. table N(0 , 1)

Valeur de la statistique de test sous $H_0 : P_H = P_F$

$$u_0 = \frac{(\widehat{P}_H - \widehat{P}_F) - (p_H - P_F)}{\sqrt{\frac{\widehat{p}_H \widehat{q}_H}{n_H} + \frac{\widehat{p}_F \widehat{q}_F}{n_F}}} = \frac{0.05 - 0}{\sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{240} + \frac{0.20 \times 0.80}{210}}} = 1.273$$



Règle de décision et conclusion :

Conclusion : La valeur $u_0 = 1.273 < u_{\alpha=5\%} = u_{5\%} = 1.645$ appartient à la zone de non-rejet de H_0, on peut conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que la différence observée $(\widehat{p}_H - \widehat{p}_F) = 5\%$ dans le secteur de l'industrie, n'est pas significative ; les proportions ne sont pas significativement différentes. Les hommes n'ont pas plus créés d'entreprises dans le secteur de l'industrie que les femmes.

d) Test d'indépendance du khi-deux - Test unilatéral risque à droite

Secteur d'activité / Genre	Homme	Femme	Total
Industrie	60 (54.40)	42 (47.60)	102
Construction	50 (38.93)	23 (34.07)	73
Commerce-Transport-Hébergement-Restauration	60 (61.33)	55 (53.67)	115
Services aux ménages et aux entreprises	70 (85.33)	90 (74.67)	160
Total	240	210	450

Effectifs Observés & **(Théoriques)**

Tableau de contingence : Secteur d'activité & Genre

Hypothèses statistiques :

$\begin{cases} H_0 : \text{le secteur d'activité et le genre du créateur de l'entreprise sont indépendants} \\ H_1 : \text{Il y a un lien entre le secteur d'activité et le genre du créateur de l'entreprise.} \end{cases}$

Seuil de signification : $\alpha = 5\%$

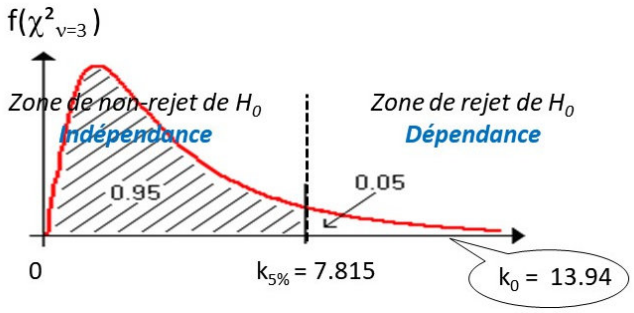
Degrés de liberté : $\nu = (p-1)(q-1) = (4-1)(2-1) = 3\ d.d.l.$

Statistique de test : $\Sigma_{i=1}^{p=4}\Sigma_{j=1}^{q=2}\frac{(o_{ij}-t_{ij})^2}{t_{ij}} \rightarrow \chi^2_{\nu=3\ d.d.l.}$

Calcul de la statistique de test sous H_0 : Indépendance :

La valeur calculée de la statistique de test sous l'hypothèse nulle H_0 :

$$k_0 = \Sigma_{i=1}^{p=4}\Sigma_{j=1}^{q=2}\frac{(o_{ij}-t_{ij})^2}{t_{ij}} = \frac{(60-54.40)^2}{54.40} + \cdots + \frac{(90-74.67)^2}{74.67} = 13.94$$



Conclusion : comme $k_0 = 13.94 > k_{(5\%\ ,\ 3\ d.d.l.)} = 7.815$, Rejet de l'hypothèse nulle H_0 d'indépendance. On peut donc conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$ qu'il y a bien un lien significatif entre le secteur d'activité et le genre du créateur de l'entreprise.

********** ○○○ **********