Corrigé du Test 2 :
Auto-Evaluation des Connaissances

Barème de notation : Mauvaise réponse = - 1 pt, Pas de réponse = 0 pt, Bonne réponse = + 1 pt

Entourer la bonne réponse.

Répondre par Vrai ou Faux, chaque affirmation peut être Vraie ou Fausse.

Dans le cas où c'est faux, indiquer la bonne réponse.

La non réponse correspond à « pas de réponse ».

La durée du test est limitée à 1h30mn.

Aucun document n'est autorisé.

Des extraits de tables statistiques sont donnés en Annexe.

Questions AEC1 : Questions diverses concernant les tests d'hypotèse.

« Choisir »

1) L'hypothèse alternative H_1 est l'hypothèse dans laquelle on fixe a priori un paramètre de la population à une valeur particulière que l'on soumet à un test. Faux, c'est l'hypothèse nulle H_0	F	
2) Le risque α de première espèce est le risque de rejeter l'hypothèse nulle H_0 alors qu'elle est vraie.		V
3) Dans l'application d'un test d'hypothèse, l'hypothèse nulle H_0 est supposée vraie.		V
4) Le risque de deuxième espèce est le risque d'accepter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie. Faux, c'est le risque d'accepter l'hypothèse H_0 alors que l'hypothèse H_1 est vraie.	F	
5) Dans un test bilatéral, il existe deux valeurs critiques qui peuvent conduire au rejet de l'hypothèse nulle.		V
6) Dans un test d'hypothèse, la région critique correspond à la zone de rejet de l'hypothèse nulle H_0.		V
7) La puissance d'un test est la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle H_0 sachant que l'hypothèse alternative H_1 est vraie.		V
8) La courbe d'efficacité d'un test d'une moyenne m est le graphique du risque α de 1ère espèce en fonction de diverses valeurs de m spécifiées sous l'hypothèse alternative H_1. Faux, c'est le graphique du risque β de 2ème espèce en fonction des valeurs de m spécifiées sous H_1.	F	
9) Une réduction du risque α de première espèce, réduit la zone de non-rejet de l'hypothèse nulle H_0. Faux, une réduction du risque α augmente la zone de non-rejet de H_0.	F	
10) Dans un test d'hypothèse, lorsqu'on ne rejette pas l'hypothèse nulle H_0 alors que l'hypothèse alternative H_1 est vraie, on commet une erreur dite de deuxième espèce.		V
11) Dans un test de comparaison de moyennes d'échantillons appariés, l'hypothèse nulle que l'ont veut habituellement tester s'écrit : $H_0 : m_d = m_x - my \neq 0$. Faux, m$_d = m_x - my = 0$.	F	
12) Dans un test de comparaison de variances, la statistique de test $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{S_2^{*2}}{S_1^{*2}} \to F(\nu_1;\nu_2)$. Faux, $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{S_2^{*2}}{S_1^{*2}} \to F(\nu_2;\nu_1)$.	F	
13) La quantité F est une variable aléatoire réelle continue distribuée selon une loi de Fisher à ν_1 et ν_2 degrés de liberté, peut prendre des valeurs négatives. Faux, F ne peut prendre que des valeurs réelles non négatives ($F \geq 0$).	F	
14) Dans un test d'hypothèse bilatéral, il existe 2 régions d'acceptation et une région critique de H_0. Faux, il existe 1 région d'acceptation de H_0 et 2 régions critiques de rejet de H_0.	F	
15) L'hypothèse nulle H_0 comporte toujours dans son énoncé le signe strictement égal.		V
16) Dans un test d'hypothèse d'un paramètre, si on s'intéresse au changement du paramètre dans l'une ou l'autre des directions, on opte pour un test bilatéral.		V

Questions AEC2 : Une entreprise achète des cables d'acier dont la résistance moyenne à la rupture doit être supérieure ou égale à $250 kg/cm^2$. Tant que cette norme est respectée, l'entreprise est satisfaite du produit, une résistence moyenne à la rupture inférieure à cette norme est inadéquate pour l'entreprise.

	« Choisir »	
1) Lors de la réception d'un lot de 51 cables d'un fournisseur Local, on a observé une résistance moyenne à la rupture de 249.5 kg/cm^2 avec un écart-type de la résistance à la rupture de 4 kg/cm^2.		
a) On peut conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que la variance de la résistence à la rupture est différente de la valeur norme de 25 kg^2/cm^4. Faux, $k_1 = 32.357 < k_0 = 32.64 < k_2 = 71.420$ Non-rejet de H_0	F	
b) On peut conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que la variance de la résistence à la rupture est inférieure à la valeur norme de 25 kg^2/cm^4.		V
2) Test de la résistance moyenne à la rupture des cables :		
a) Les hypothèses statistiques formulées : $H_0 : m = 250$ contre $H_1 : m \geq 250$ Faux, $H_0 : m \geq 250$ qualité acceptable contre $H_1 : m < 250$ qualité inacceptable	F	
b) On peut conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que les cables du fournisseur sont d'une qualité inacceptable. Faux, $t_0 = -0.8839 > t_{5\%} = -1.6759$ Non-rejet de H_0 : qualité acceptable	F	
3) L'entreprise s'approvisionne aussi d'un fournisseur situé à l'étranger. Le contrôle d'un échantillon de 51 cables a révélé une résistance moyenne empirique à la rupture de 247.5 kg/cm^2 avec un écart-type de la résistance à la rupture de 5 kg/cm^2.		
a) On peut conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que les variances des résistences à la rupture des cables des deux fournisseurs sont différentes. Faux, $f_1 = 0.571 < f_0 = 0.64 < f_2 = 1.752$ Non-rejet de H_0	F	
b) On peut conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que les cables du fournisseur local sont plus résistants que ceux du fournisseur étranger.		V

Questions AEC3 : La course au vaccin contre le Covid-19. L'efficacité direct d'un vaccin correspond à la réduction de la probabilité de développer la maladie ou d'être infecté par le virus, elle se calcule de la façon suivante : $EV = (1 - \frac{Proportion\ d'infectés\ chez\ les\ vaccinés}{Proportion\ d'infectés\ chez\ les\ non\ vaccinés}) \times 100$.

	« Choisir »	
1) Dans une population de 2000 sujets, 1900 ont été vaccinés avec le vaccin P et 100 non vaccinés. On a constaté que 57 sujets ont été infectés par le virus au cours de l'épidémie chez les vaccinés et 38 chez les non vaccinés. On s'intéresse à la proportion p_v de sujets infectés parmi les $n_v = 1900$ sujets vaccinés.		
a) La statistique de test de la proportion p_v s'écrit : $\frac{\widehat{P}_{n_v} - p_v}{\sqrt{\frac{p_v q_v}{n_v}}} \to N(0;1)$.		V
b) On peut conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 1\%$, que la proportion p_v d'infectés parmi les vaccinés, est inférieure à 4%. Faux : $u_{1\%} = -2.325 < u_0 = -2.224$ Non-rejet de H_0	F	
c) On note $\widehat{p}_l$ la proportion limite qui sépare les zones de rejet et de non-rejet de H_0 : $P(\widehat{P}_{n_v} \leq \widehat{p}_l) = \alpha = 0.01 \Rightarrow \widehat{p}_l = 2.95\%$.		V
d) On peut conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 1\%$ et en supposant que la proportion réelle sous $H_1 : p_v = 2.5\%$, que le risque d'erreur de deuxième espèce $\beta = 10.45\%$. Vrai, $\beta = P(Non-rejet H_0/H_1 : p_v = 2.5\%) = P(\widehat{P}_{n_v} > \widehat{p}_l = 0.0295/H_1 : p_v = 2.5\%) = P(U > \frac{0.0295-0.025}{\sqrt{\frac{0.025\times0.975}{1900}}} = 1.256)$ $\beta = 1 - P(U \leq 1.256) = 1 - \Phi(1.256) = 1 - 0.8955 = 10.45\%$ cf. table N(0,1)		V
e) On peut conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 1\%$ et en supposant que la proportion réelle sous $H_1 : p_v = 2.5\%$, que la puissance du test est égale à 99%. Faux, la puissance du test : $1 - \beta = 1 - 0.1045 = 89.55\%$.	F	
f) L'Efficacité direct du Vaccin P : $EV_P = 90\%$. Faux : $EV_P = (1 - \frac{0.03}{0.38}) = 92.11\%$	F	
2) Dans une population de 3000 sujets, comparable à la précédente et exposée au même programme de vaccination, 2800 sujets ont été vaccinés avec le vaccin M et 200 non vaccinés. On a constaté que 112 sujets ont été infectés par le virus au cours de l'épidémie chez les vaccinés et 80 chez les non vaccinés.		
a) L'Efficacité direct du Vaccin M : $EV_M = 90\%$.		V
b) On peut conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 1\%$, que la proportion d'infectés par le virus dans la population des vaccinés avec le vaccin P est significativement plus faible que celle dans la population des vaccinés avec le vaccin M. Faux : $u_{1\%} = -2.325 < u_0 = -1.8560$ Non-rejet de H_0	F	

Tables statistiques

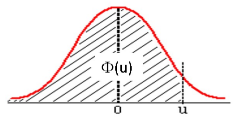

Table de la loi Normale Centrée Réduite : $U \rightarrow N(0;1)$

Fonction de répartition : Φ $\quad \Phi(u) = P(U \leq u)$; $\Phi(-u) = P(U \leq -u) = 1 - \Phi(u)$

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520

Exemples : $\Phi(1.26) = P(U \leq 1.26) = 0.89617 = 89.62\%$; $\Phi(u) = P(U \leq u) = 97.50\% \Rightarrow u = 1.96$

*************** °°° ***************

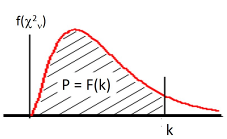

Table de la loi du $\chi^2_{\nu\ d.d.l.}$

Fractiles k de la loi de khi-deux à ν degrés de liberté. Fonction de répartition : $F(k) = P(\chi^2_\nu \leq k)$

ν P	0.010	0.020	0.025	0.050	0.100	0.150	0.200	0.800	0.900	0.950	0.975	0.980	0.990
10	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	5.570	6.179	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.21
20	8.260	9.237	9.591	10.851	12.443	13.604	14.578	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.57
30	14.953	16.306	16.791	18.493	20.599	22.110	23.364	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.89
40	22.164	23.838	24.433	26.509	29.051	30.856	32.345	47.269	51.805	55.758	59.342	60.436	63.69
49	28,941	30,871	31,555	33,930	36,818	38,859	40,534	57,079	62,038	66,339	70,222	71,406	74,919
50	29.707	31.664	32.357	34.764	37.689	39.754	41.449	58.164	63.167	67.505	71.420	72.613	76.15
51	30,475	32,459	33,162	35,600	38,560	40,650	42,365	59,248	64,295	68,669	72,616	73,818	77,386
60	37.485	39.699	40.482	43.188	46.459	48.759	50.641	68.972	74.397	79.082	83.298	84.580	88.38

Exemples : $\nu = 10$ d.d.l. $\quad F(k) = P(\chi^2_{10} \leq k) = 0.95 \Rightarrow k = 18.307$; $k = 15.987$ $\quad F(15.987) = P(\chi^2_{10} \leq 15.987) = 0.90$

*************** °°° ***************

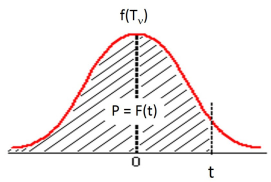

Table de la loi de Student

Fractile t de la loi de Student à ν degrés de liberté

Fonction de répartition : $P = F(t) = P(T_\nu \leq t)$.

ν P	0,9250	0,9300	0,9350	0,9400	0,9500	0,9550	0,9600	0,9700	0,9750	0,9800	0,9900	0,9950
10	1,5592	1,6031	1,6498	1,6998	1,8125	1,8768	1,9481	2,1202	2,2281	2,3593	2,7638	3,1693
20	1,4970	1,5369	1,5791	1,6242	1,7247	1,7816	1,8443	1,9937	2,0860	2,1967	2,5280	2,8453
30	1,4774	1,5159	1,5568	1,6004	1,6973	1,7520	1,8120	1,9546	2,0423	2,1470	2,4573	2,7500
49	1,4625	1,5001	1,5400	1,5824	1,6766	1,7296	1,7878	1,9253	2,0096	2,1099	2,4049	2,6800
50	1,4620	1,4996	1,5394	1,5818	1,6759	1,7289	1,7870	1,9244	2,0086	2,1087	2,4033	2,6778
51	1,4615	1,4991	1,5389	1,5813	1,6753	1,7282	1,7863	1,9236	2,0076	2,1076	2,4017	2,6757
60	1,4582	1,4956	1,5352	1,5772	1,6706	1,7232	1,7808	1,9170	2,0003	2,0994	2,3901	2,6603

Exemple : $\nu = 10$ d.d.l. $P(T_{10} \leq t) = 0.975 \Rightarrow t = +2.2281$ et $P(T_{10} \leq t) = 0.025 \Rightarrow t = -2.2281$

*************** °°° ***************

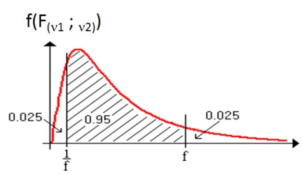

Table de la loi de Fisher-Snedecor

Valeur f de la variable de Fisher-Snedecor $F(\nu_1; \nu_2)$ ayant la probabilité 2.5% d'être dépassée.

ν_1 : degrés de liberté du numérateur ν_2 : degrés de liberté du dénominateur $F(f) = P(F(\nu_1, \nu_2) \leq f) = 97.50\%$

ν_2 ν_1	5	10	20	49	50	51	60
5	7,146	6,619	6,329	6,146	6,144	6,141	6,123
10	4,236	3,717	3,419	3,224	3,221	3,219	3,198
20	3,289	2,774	2,464	2,252	2,249	2,246	2,223
49	2,838	2,323	1,999	1,762	1,759	1,755	1,728
50	2,833	2,317	1,993	1,756	1,752	1,748	1,721
51	2,827	2,311	1,988	1,749	1,746	1,742	1,715
60	2,786	2,270	1,944	1,702	1,699	1,695	1,667

Exemples : $\nu_1 = 5$ d.d.l. et $\nu_2 = 10$ d.d.l. $P(F_{97.5\%\ ;5\ ;\ 10} \leq f) = 0.975 \Rightarrow f = 4.24$

$P(F_{2.5\%\ ;\ 5\ ;\ 10} \leq f') = 0.025$

$P(F_{97.5\%\ ;\ 10\ ;\ 5} \leq f) = 0.975 \Rightarrow f = 6.62 \Rightarrow f' = \frac{1}{f} = \frac{1}{6.62} = 0.151$

*************** °°° ***************