UFR de sciences économiques et de gestion

Université Lumière Lyon 2

UFR SEG L3-S6

Statistique Inférentielle

Support de cours (2/3)

Tests paramétriques

Rafik Abdesselam

Courriel : rafik.abdesselam@univ-lyon2.fr
Web : http://perso.univ-lyon2.fr/~rabdesse/fr/
Support pédagogique : http://perso.univ-lyon2.fr/~rabdesse/Documents/

Tests d'hypothèses paramétriques

- Les tests d'hypothèses constituent un aspect important de la statistique inférentielle dont le principe général peut s'énoncer comme suit :

1. Soit un caractère d'une population dont la valeur du paramètre (moyenne, proportion, variance, etc.) est inconnue. Une hypothèse dite "nulle" ou H_0 est alors formulée sur ce paramètre inconnu, elle résulte de considérations théoriques, pratiques ou encore plus simplement basée sur un pressentiment.

2. On veut porter un jugement sur cette hypothèse, sur la base des résultats d'un échantillon prélevé de cette population.

3. Pour décider si l'hypothèse "nulle" formulée est supportée ou non par les observations, il faut une méthode qui permettra de conclure si l'écart observé entre la valeur de la statistique obtenue à partir de l'échantillon et celle du paramètre spécifiée dans l'hypothèse est trop important pour être uniquement imputable au fluctuations d'échantillonnages.

Tests d'hypothèses paramétriques

- La construction d'un test d'hypothèse consiste alors à déterminer entre quelles valeurs peut varier la statistique en supposant vraie l'hypothèse nulle H_0 formulée.
- Les distributions d'échantillonnage des paramètres - Statistiques de test que nous avons traitées dans le chapitre précédent vont être particulièrement utiles dans l'élaboration d'un test statistique.
- Concepts importants dans l'élaboration d'un test statistique :
  1. Hypothèse statistique : est un énoncé (une affirmation) concernant les caractéristiques (valeurs des paramètres, forme de la distribution des observations) d'une population.
  2. Test d'hypothèse (ou test statistique) : est une démarche qui à pour but de fournir une règle de décision permettant, sur la base de résultats d'échantillon, de faire un choix : rejeter ou non-rejeter l'hypothèse nulle H_0.

Tests d'hypothèses paramétriques

- Hypothèses statistiques :
  1. Hypothèse nulle H_0 : hypothèse selon laquelle on fixe *a priori* un paramètre inconnu de la population à une valeur particulière.
  2. Hypothèse alternative H_1 (ou contre-hypothèse) : n'importe quelle autre hypothèse qui diffère de l'hypothèse nulle H_0.
- Remarque : c'est toujours l'hypothèse nulle qui est soumise au test et toute la démarche du test s'effectue en considérant ou supposant cette hypothèse H_0 comme vraie.
- Conclusion : Rejet ou Non-Rejet de l'hypothèse nulle H_0, en aucun cas l'Acceptée. Si H_0 est rejetée, on accepte l'hypothèse alternative H_1.
- Seuil de signification d'un test statistique : c'est le risque d'erreur α, consenti à l'avance de rejeter à tort l'hypothèse nulle H_0 alors qu'elle est vraie (favoriser alors l'hypothèse H_1) :

$$\alpha = P(\textit{Rejeter}\,\mathrm{H}_0 \ / \ H_0 \ \text{ vraie}) = \mathrm{P}(\text{Choisir } \ H_1 \ / \ H_0 \ \text{ vraie})$$

Tests d'hypothèses paramétriques

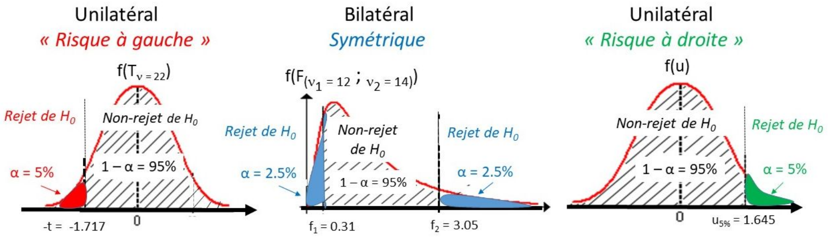
- Le seuil de signification correspond sur la distribution d'échantillonnage de la statistique de test à la région critique de Rejet H_0 dont l'aire correspond à la probabilité α.
- Sur la distribution d'échantillonnage correspondra aussi une région complémentaire, dite région d'acceptation ou encore région de Non-rejet de H_0 dont la probabilité est égale au niveau de confiance $1-\alpha$.
- La valeur observée de la statistique, calculée toujours sous H_0 déduite des résultats de l'échantillon appartient, soit à la région de Rejet H_0 (on favorisera alors l'hypothèse H_1), soit à la région de Non-rejet de H_0 (on favorisera alors l'hypothèse H_0).
- Formulation des hypothèses - Types de tests : à partir d'exemples, nous allons résumer les différents types de test "Bilatéral" ou "Unilatéral" qui peuvent se présenter et schématiser les régions de rejet et de non-rejet de l'hypothèse nulle H_0.

Remarques importantes

1. Pour un test bilatéral, les 2 valeurs critiques (tables statistiques) sont des limites de la statistique qui conduisent au rejet de H_0, selon le seuil de signification α choisi.
2. Un test unilatéral "risque à droite" ou "risque à gauche" ne comporte qu'une seule valeur critique.
3. Quelle que soit le type de test, l'hypothèse nulle H_0 comporte toujours le signe égal $(\leq, =, \geq)$ et spécifie la valeur du paramètre.
4. l'hypothèse alternative H_1 est formulée en choisissant l'une ou l'autre des trois formes $(<, \neq, >)$. On choisira la plus pertinente à la situation pratique analysée.
5. Dans la plupart des tests d'hypothèses, l'inégalité dans l'hypothèse H_1 dénote dans quelle direction est localisée la région de rejet (critique) de l'hypothèse H_0.

Tests d'hypothèses paramétriques

- Tests - Hypothèses statistiques - Statistiques de test



$$\begin{cases} H_0 : m_1 \geq m_2 \Leftrightarrow m_1 - m_2 \geq 0 \\ H_1 : m_1 < m_2 \Leftrightarrow m_1 - m_2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Leftrightarrow \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \Leftrightarrow \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$I.C._{1-\alpha=95\%} : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^1}$$

$$\begin{cases} H_0 : p \leq p_0 = 10\% \\ H_1 : p > p_0 = 10\% \end{cases}$$

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (m_1 - m_2)}{s^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightarrow T_{\nu=22\, d.d.l.}$$

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}} \rightarrow F_{(\nu_1=12,\nu_2=14)}$$

$$\frac{(\widehat{P} - p)}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \hookrightarrow N(0;1)$$

Démarche d'un test statistique

- Les principales étapes à suivre dans l'élaboration d'un test statistique :

1. Hypothèses statistiques,
2. Seuil de signification et conditions d'application du test,
3. La statistique de test qui convient,
4. Calcul de la statistique sous H_0.
5. Règle de décision et conclusion.

Risques d'un test statistique

- La règle de décision d'un test statistique comporte 2 risques ou types d'erreur possibles. Ces deux risques varient en sens inverse : quand l'un augmente, l'autre diminue :

1. Risque de première espèce α : c'est le seuil de signification α ; risque de rejeter à tort l'hypothèse nulle H_0 lorsque celle-ci est vraie :

$$\alpha = P(\mathit{Rejet}\ H_0 \,/\, H_0\ \mathit{vraie})$$

2. Risque de deuxième espèce β : c'est le risque de ne pas rejeter l'hypothèse nulle H_0 alors que l'hypothèse H_1 vraie :

$$\beta = P(\mathit{Non\ Rejet}\ H_0 \,/\, H_1\ \mathit{vraie})$$

- Le risque de première espèce α est choisi *a priori* par l'utilisateur.
- Le risque de deuxième espèce β dépend de l'hypothèse alternative H_1 et ne peut se calculer que si une valeur du paramètre est spécifiée dans l'hypothèse H_1, que l'on suppose vraie.

Risques & Puissance d'un test statistique

- Le graphique de β en fonction des diverses valeurs du paramètre posées en H_1 s'appelle la courbe d'efficacité du test.

- Puissance du test $(1-\beta)$: c'est la probabilité complémentaire du risque de $2^{ème}$ espèce β : le risque de rejeter l'hypothèse nulle H_0 alors que l'hypothèse H_1 vraie :

$$1-\beta = P(Rejet\ H_0 \,/\, H_1\ vraie)$$

- Plus β est petit, plus le test est puissant.

- La puissance d'un test mesure sa capacité à séparer au mieux les deux hypothèses H_0 et H_1. Pour un risque de première espèce α donné, un bon test consiste à minimiser le risque de deuxième espèce β ou à maximiser la puissance $1-\beta$. Un test est satisfaisant si sa puissance est au moins égale à 80%.

Risques & Puissance d'un test statistique

- Pour une taille d'échantillon n et un risque α donnés, le risque β diminue lorsque l'écart entre la valeur du paramètre spécifiée sous H_0 et celle supposée vraie sous H_1 augmente.
- Réduire le risque α revient à élargir la zone de non-rejet de H_0 et donc à augmenter le risque β. Lorsqu'un risque diminue, l'autre augmente.
- Pour un risque α choisi et un écart-type σ déterminé, augmenter la taille de l'échantillon n revient à avoir une meilleure précision puisque $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ diminue. La zone de non-rejet de H_0 sera ainsi plus restreinte, ce qui conduit à diminuer le risque β et à augmenter la puissance du test.
- Le graphique de $(1-\beta)$ en fonction des diverses valeurs du paramètre posées en H_1 s'appelle la courbe de puissance du test.
- Exemple : En contrôle industriel, le risque α correspond au risque pris par le producteur (ou le fournisseur) alors que le risque β correspond au risque pris par le consommateur (ou le client).

Risques d'un test statistique

- Les risques liés aux tests d'hypothèses peuvent se résumer comme suit :

	Réalité	
Décision du test	H_0 vraie	H_1 vraie
Non-rejet H_0	bonne : $1-\alpha$	mauvaise : β
Rejet de H_0	mauvaise : α	bonne : $1-\beta$

Exemple d'application - Risques d'erreur

- Calcul et représentation graphique des risques α et β, du niveau de confiance $(1-\alpha)$ et de la puissance du test $(1-\beta)$:
- Un procédé de remplissage est ajusté de telle sorte que les contenants pèsent en moyenne 400g. Le poids des contenants est supposé normalement distribué avec un écart-type de 8g.
  On a prélevé un échantillon de 16 contenants pour vérifier si le procédé de remplissage se maintient en moyenne à 400g, on opte pour la règle de décision suivante :

$$\begin{cases} si\ \ 396{,}08 \text{ g} \leq \overline{X}_{16} \leq 403,92g & \textit{le processsus opère correctement} \\ \textit{Sinon} & \textit{arrêter le processus de remplissage} \end{cases}$$

1. Quelles sont les hypothèses statistiques que l'on veut tester avec cette méthode de contrôle ?
2. Déterminer la probabilité de commettre une erreur de première espèce.
3. Lors d'un récent contrôle, on a obtenu, pour un échantillon de 16 contenants, un poids moyen de 395g. Doit-on poursuivre ou arrêter la production ?
4. Quelle est la probabilité de commettre une erreur de deuxième espèce selon l'hypothèse alternative H_1 : m = 394 g ?
5. Avec ce plan de contrôle, quelle est la probabilité de rejeter l'hypothèse selon laquelle le procédé opère à 400g, alors qu'en réalité il opère à 394g ?
6. Faire de même pour les valeurs suivantes sous H_1 : m = 395g, 396g, 397g, 398g, 399g et 400g. Tracer la courbe d'efficacité du test.

Exemple d'application - Solution 1/4

- Hypothèses statistiques $\begin{cases} H_0 : m = m_0 = 400 \text{ g} & \text{La machine fonctionne normalement} \\ H_1 : m \neq m_0 = 400 \text{ g} & \text{La machine est déréglée} \end{cases}$

- Seuil de signification et conditions d'application du test : $\alpha = 5\%$.

  Conditions d'application du test : Test bilatéral de la moyenne (σ^2 connue). Petit échantillon de taille $n = 16$, prélevé d'une population normale. Test bilatéral symétrique.

- Statistique de test : $\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0\,;\,1)$.

- Risque de première espèce.

$$\alpha = P(\textit{rejeter } H_0 / H_0 \textit{ vraie}) = P(|\overline{X}_{16} - m| > 3.92 / H_0 \textit{vraie} : m = 400\,\text{g})$$
$$= 1 - P[|\overline{X}_{16} - 400| \leq 3.92] = 1 - P[|\frac{(\overline{X}_{16} - 400)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})| \leq \frac{3.92}{\frac{8}{\sqrt{16}}}]$$
$$= 1 - P[|U| \leq 1.96] = 1 - P[-1.96 \leq U \leq 1.96] = 1 - (\Phi(1.96) - \Phi(-1.96))$$
$$= 1 - (2\Phi(1.96) - 1) = 2 - 2\Phi(1.96) = 2 - 2 \times 0.975 = 5\%.$$

- Doit-on poursuivre ou arrêter la production ?

  $\overline{x}_{16} = 395 \notin [396.08\,g\,;\ 403.92\,g]$: intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha = 95\%$ de m.

  $\overline{x}_{16} = 395$ g appartient à la zone de Rejet de l'hypothèse nulle H_0.

  On doit donc arrêter le processus de remplissage et le réajuster.

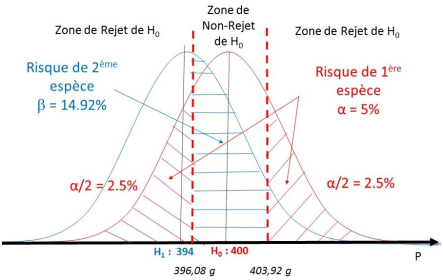
Exemple d'application - Solution 2/4

- Risque de deuxième espèce.

$$\beta = P(Non - rejeter\ H_0 / H_1\ vraie) = P(396.08 \leq \overline{X}_{16} \leq 403.92 / H_1\ vraie : m = 394g)$$
$$= P[\frac{(396.08-394)}{\frac{8}{\sqrt{16}}} \leq U \leq \frac{(403.92-394)}{\frac{8}{\sqrt{16}}}] = P[1.04 \leq U \leq 4.96]$$
$$= \Phi(4.96) - \Phi(1.04) \simeq 1 - 0.8508 = 14.92\%$$ cf. table N(0 , 1)

- Puissance du test.

Probabilité de rejeter l'hypothèse nulle H_0 selon laquelle le procédé opère à m = 400 g, alors qu'en réalité il opère à m = 394 g : 1 - $\beta = P(rejeter H_0 / H_1\, vraie : m = 394\, g) = 1 - 0.1492 = 85.08\%$

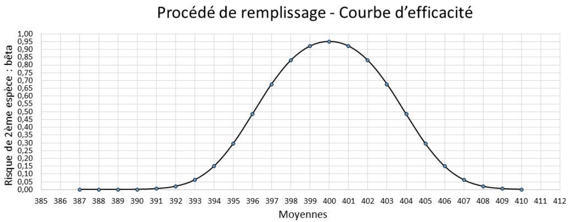


Exemple d'application - Solution 3/4

- Courbe d'efficacité du test.

  L'erreur β de 2ème espèce en fonction de la position moyenne du procédé sous H_1.

Moyenne sous H_1 : m	Risque β	Puissance $1-\beta$
387	0,0000	1,0000
388	0,0000	1,0000
389	0,0002	0,9998
390	0,0012	0,9988
391	0,0055	0,9945
392	0,0207	0,9793
393	0,0618	0,9382
394	0,1492	0,8508
395	0,2946	0,7054
396	0,4840	0,5160
397	0,6770	0,3230



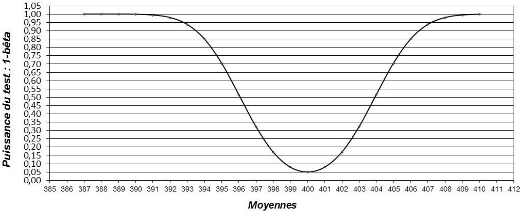
Exemple d'application - Solution 4/4

- Courbe de puissance du test.

  La puissance du test $1-\beta$ en fonction de la position moyenne du procédé sous H_1.

Moyenne sous H_1 : m	Risque β	Puissance $1-\beta$
399	0,9209	0,0791
400	0,9500	0,0500
401	0,9209	0,0791
402	0,8299	0,1701
403	0,6770	0,3230
404	0,4840	0,5160
405	0,2946	0,7054
406	0,1492	0,8508
407	0,0618	0,9382
408	0,0207	0,9793
409	0,0055	0,9945
410	0,0012	0,9988

Procédé de remplissage - Courbe de la puissance du test



Exemple d'application 1

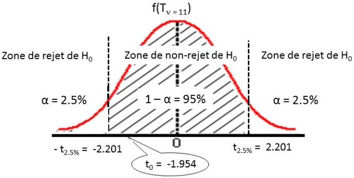
- Une entreprise fournit à un client des tiges d'acier. Le client exige que les tiges aient en moyenne, une longueur de 29 mm.
  La longueur des tiges est supposée normalement distribuée.
  On veut vérifier si le procédé de fabrication opère bien à 29 mm.
  Un échantillon aléatoire de 12 tiges provenant de la fabrication donne une longueur moyenne de 27,25 mm et un écart-type empirique de 2,97 mm.

  Doit-on conclure, au seuil $\alpha = 5\%$, que la machine est déréglée ?

Exemple d'application 1 - Solution

On s'intéresse à l'égalité ou la différence spécifiée sous H_1 par le signe " $\neq$ ", on opte pour un test bilatéral symétrique.

1. Hypothèses statistiques $\begin{cases} H_0 : m = m_0 = 29 \, (la\, machine\, n'est\, pas\, déréglée) \\ H_1 : m \neq m_0 = 29 \, (la\, machine\, est\, déréglée) \end{cases}$
2. Seuil de signification et conditions d'application du test : $\alpha = 5\%$, petit échantillon n = 12 provenant d'une population normale. Test bilatéral de la longueur moyenne des tiges (variance inconnue) à une moyenne donnée $m_0 = 29$.
3. Statistique de test : $\frac{\overline{X}_n - m}{S_n^*/\sqrt{n}} \rightarrow T_{n-1=11\ d.d.l.}$
4. Calcul de la statistique de test sous l'hypothèse nulle H_0 : $m = m_0 = 29$



$$t_0 = \frac{\overline{x}_{12} - m}{s_{12}^*/\sqrt{12}} = \frac{27.25 - 29}{3.10/\sqrt{12}} = -1.954$$

$s_{12}^* = \sqrt{\frac{12}{11}} s_{12} = \sqrt{\frac{12}{11}} 2.97 = 3.10$. Le fractiles de Sudent T_{11} (cf. table) : $t_{\frac{\alpha}{2}=2.5\%} = \pm 2.201$.

5. Règle de décision et conclusion : La valeur t_0 appartient à la zone de non-rejet de l'hypothèse nulle H_0 : $t_0 = -1.954 \in [-2.201\ ;\ 2.201]$. On peut donc conclure avec risque d'erreur $\alpha = 5\%$, qu'il n'y a pas de différence significative. La machine semble bien réglée, il n'y a pas lieu d'intervenir.

Exemple d'application 2

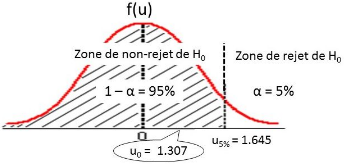
- Aux dernières élections, un parti politique a obtenu 42% des suffrages. Un récent sondage a révélé que, sur 1041 personnes interrogées en âge de voter, 458 accorderaient son appui à ce parti.

  Le secrétaire général du parti a déclaré que la popularité de son parti est en hausse. Que penser de cette affirmation au seuil de signification $\alpha = 5\%$, ?

Exemple d'application 2 - Solution

On s'intéresse au changement d'un paramètre dans une direction spécifiée sous H_1 par le signe " $>$ ", on opte pour un test unilatéral "risque à droite".

1. Hypothèses statistiques $\begin{cases} H_0 : p = p_0 = 0.42 \ (p \leq p_0) \\ H_1 : p > p_0 = 0.42 (\textit{popularité en hausse}) \end{cases}$
2. Seuil de signification et conditions d'application : $\alpha = 5\%$, grand échantillon $(n = 1041)$ Test unilatéral "risque à droite" sur une proportion donnée $p_0 = 42\%$ au premier sondage. Sachant que pour le second sondage, la proportion estimée est : $\widehat{p} = \frac{458}{1041} = 44\%$
3. Statistique de test : $\frac{\widehat{P}_n - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \hookrightarrow N(0,1)$
4. Calcul de la statistique de test sous l'hypothèse nulle H_0 : $p = p_0 = 0.42$



$$u_0 = \frac{\widehat{P}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \, q_0}{n}}} = \frac{0.44 - 0.42}{\sqrt{\frac{0.42 \, 0.58}{1041}}} = 1.307$$

5. Règle de décision et conclusion : fractile de la loi $N(0,1)$ cf. table : $u_{5\%} = 1.645$. La valeur u_0 appartient à la zone de non-rejet de H_0 : ($u_0 = 1.307 < u_{5\%} = 1.645$), on peut donc conclure, avec risque d'erreur $\alpha = 5\%$ que la proportion du second sondage n'est pas significativement supérieure à celle du premier sondage. L'écart observé de 2% entre les deux sondages est dû aux fluctuations d'échantillonnage. L'affirmation du chef n'est pas justifiée statistiquement.

Exemple d'application 3

- Le responsable de la production suggère à ses clients des tiges d'acier avec un nouvel alliage. Il semble que ceci permettrait d'obtenir une résistance à la rupture plus élevée. Les résultats d'un test de résistance à la rupture de 50 tiges avec et sans le nouvel alliage se résument comme suit.

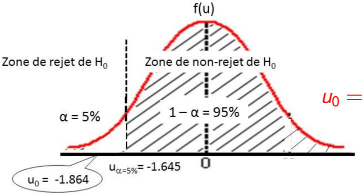
	Sans le nouvel alliage	Avec le nouvel alliage
Nombre de tiges	50	50
Résistance moyenne	600.50	605.00
Variance empirique	148.50	137.61

Au seuil de signification $\alpha = 5\%$, est-ce que l'hypothèse selon laquelle la résistance moyenne à la rupture sans l'alliage est moins élevée que celle avec l'alliage est confirmée ?

Exemple d'application 3 - Solution

On s'intéresse au changement d'un paramètre dans une direction spécifiée sous H_1 par le signe " $<$ ", on opte pour un test unilatéral "risque à gauche".

1. Hypothèses statistiques $\begin{cases} H_0 : m_s = m_a \; (m_s \geq m_a) \\ H_1 : m_s < m_a \end{cases}$
2. Seuil de signification et conditions d'application du test : $\alpha = 5\%$, grands échantillons $(n_s > 30$ et $n_a > 30)$ (variances inconnues). Test unilatéral "risque à gauche".
3. Statistique de test : $\frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_p) - (m_s - m_a)}{\sqrt{\frac{s_s^{*2}}{n_s} + \frac{s_a^{*2}}{n_a}}} \to N(0;1)$
4. Calcul de la statistique de test sous H_0 : $m_s - m_a = 0$



$$u_0 = \frac{(\overline{x}_n - \overline{y}_p) - 0}{\sqrt{\frac{s_s^{*2}}{n_s} + \frac{s_a^{*2}}{n_a}}} = \frac{(600.5 - 605) - 0}{\sqrt{\frac{148.5}{49} + \frac{137.61}{49}}} = -1.864$$

Sachant que $\frac{s^{*2}}{n} = \frac{s^2}{n-1}$ et que le fractile de la loi $N(0,1)$ (cf. table) : $u_{5\%} = -1.645$

5. Règle de décision et conclusion : u_0 appartient à la zone de rejet de H_0 $(u_0 = -1.864 < u_{5\%} = -1.645)$, on peut donc conclure, avec risque d'erreur $\alpha = 5\%$ qu'il y a une différence significative. La résistance moyenne à la rupture sans alliage est significativement plus petite que celle avec alliage.

Exemple d'application 4

- Un industriel utilise des pièces de deux constructeurs différents. Après six mois d'utilisation, il constate que :

  - Constructeur 1 : sur les 80 pièces réceptionnées, 50 ne sont jamais tombées en panne.
  - Constructeur 2 : sur les 60 pièces reçues, la proportion de pièces qui ne sont jamais tombées en panne est de l'ordre de 2 pièces sur 3.

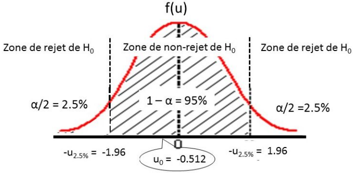
  Peut-on considérer avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que les proportions de pièces qui ne sont jamais tombées en panne de ces deux constructeurs sont équivalentes ?

Exemple d'application 4 - Solution

Test de comparaison de 2 proportions

1. Hypothèses statistiques $\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2 \,(\textit{équivalentes}) \\ H_1 : p_1 - p_2 \neq 0 \Leftrightarrow p_1 \neq p_2 \,(\textit{différentes}) \end{cases}$
2. Seuil de signification et conditions d'application du test : $\alpha = 5\%$, grands échantillons ($n_1 > 30$ et $n_2 > 30$). Test bilatéral symétrique.
3. Statistique de test : $\frac{(\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \hookrightarrow N(0;1)$ ou $\frac{(\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \hookrightarrow N(0;1)$

   avec $\widehat{p}_1 = 62.50\%$, $\widehat{p}_2 = 66.67\%$; $\widehat{p} = \frac{n_1 \widehat{p}_1 + n_2 \widehat{p}_2}{n_1 + n_2} = 64.28\%$ et $\widehat{q} = 1 - \widehat{p} = 35.71\%$.
4. Calcul de la statistique de test sous H_0 : $p_1 - p_2 = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2$



fractile de la loi $N(0,1)$, cf. table : $u_{2.5\%} = \pm 1.96$

$$u_0 = \frac{(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2) - 0}{\sqrt{\frac{\widehat{p}_1 \widehat{q}_1}{n_1} + \frac{\widehat{p}_2 \widehat{q}_2}{n_2}}} = \frac{(0.6250 - 0.6667) - 0}{\sqrt{\frac{0.6250 \times 0.3750}{80} + \frac{0.6667 \times 0.3333}{60}}} = -0.512 = \frac{(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2) - 0}{\sqrt{\widehat{p}\widehat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{(0.6250 - 0.6667) - 0}{\sqrt{0.6428 \times 0.3571(\frac{1}{80} + \frac{1}{60})}}$$

5. Règle de décision et conclusion : u_0 appartient à la zone de non-rejet de H_0 ($-1.96 < u_0 = -0.512 < -1.96$), on peut conclure, avec risque d'erreur $\alpha = 5\%$, qu'il n'y a pas de différence significative entre les proportions de pièces qui ne sont jamais tombées en panne de ces deux constructeurs. On peut donc les considérer comme égales $p_1 \simeq p_2$.

Exemple d'application 5

- On a relevé les prix de deux titres du CAC40 oeuvrant dans le secteur des assurances, des dix dernières années.
  Les prix de ces titres - actions exprimés en euros (€), sont supposés normalement distribués. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Titre	AGF	AXA
Taille de l'échantillon	10	10
Prix moyen observé (€)	29.83	26.97
Ecart-type (N) empirique	0.21	0.63

1. Les échantillons sont-ils indépendants ?
2. Peut-on affirmer avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, qu'en moyenne, le titre AGF est plus cher que le titre AXA ?

Exemple d'application 5 - Solution (1/4)

Les variances des prix des deux titres sont-elles égales ou différentes ?

- Hypothèses statistiques - Test bilatéral symétrique

$$\begin{cases} H_0 : \frac{\sigma^2_{AGF}}{\sigma^2_{AXA}} = 1 \Leftrightarrow \sigma^2_{AGF} = \sigma^2_{AXA} \\ H_1 : \frac{\sigma^2_{AGF}}{\sigma^2_{AXA}} \neq 1 \Leftrightarrow \sigma^2_{AGF} \neq \sigma^2_{AXA} \end{cases}$$

- Seuil de signification et conditions d'application du test :

Risque d'erreur $\alpha = 5\%$, petits échantillons $n_{AGF} = n_{AXA} = 10 (< 30)$. Les prix des titres sont supposés normalement distribués.

$$s^{*2}_{AGF} = \frac{n_{AGF}}{(n_{AGF}-1)} s^2_{AGF} = 0.049 \quad ; \quad s^{*2}_{AXA} = \frac{n_{AXA}}{(n_{AXA}-1)} s^2_{AXA} = 0.441$$

- Statistique de test : $\frac{\sigma^2_{AXA}}{\sigma^2_{AGF}} \frac{s^{*2}_{AGF}}{s^{*2}_{AXA}} \rightarrow F_{(\nu_1 = n_{AGF}-1=9\ d.d.l.\ ;\ \nu_2 = n_{AXA}-1=9\ d.d.l.)}$

- Calcul de la statistique de test sous H_0 : $\frac{\sigma^2_{AGF}}{\sigma^2_{AXA}} = 1 \Leftrightarrow \sigma^2_{AGF} = \sigma^2_{AXA}$

$$f_0 = \frac{s^{*2}_{AGF}}{s^{*2}_{AXA}} = \frac{0.049}{0.441} = 0.1111$$

- Fractiles de la loi de Fisher $F_{(9;9)}$ cf. Table :

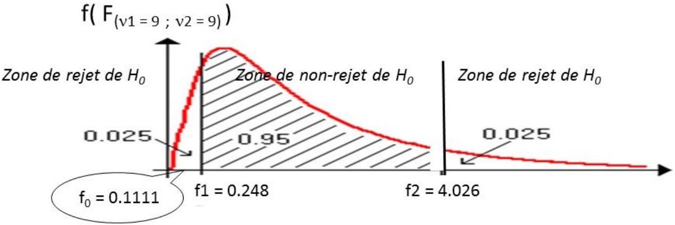
$$f_2 = f_{(97.5\%\ ;\ 9\ ,\ 9)} = 4.026 \quad ; \quad f_1 = f_{(2.5\%\ ;\ 9\ ,\ 9)} = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{4.026} = 0.248.$$

Exemple d'application 5 - Solution (2/4)

Les variances des prix des deux titres sont-elles égales ou différentes ?

1. Hypothèses statistiques - Test bilatéral symétrique

$$\begin{cases} H_0 : \frac{\sigma^2_{AGF}}{\sigma^2_{AXA}} = 1 \Leftrightarrow \sigma^2_{AGF} = \sigma^2_{AXA} \\ H_1 : \frac{\sigma^2_{AGF}}{\sigma^2_{AXA}} \neq 1 \Leftrightarrow \sigma^2_{AGF} \neq \sigma^2_{AXA} \end{cases}$$



2. Règle de décision et conclusion : $f_0 = 0.1111 \notin [f_1 = 0.248 \,;\, f_2 = 4.026]$

f_0 appartient à la zone de rejet de H_0. On peut donc conclure avec risque d'erreur $\alpha = 5\%$ qu'il y a une différence significative. Les variances des prix des titres sont différentes $\sigma^2_{AGF} \neq \sigma^2_{AXA}$.

Exemple d'application 5 - Solution (3/4)

Comparaison de 2 moyennes - Variances : $\sigma^2_{AGF} \neq \sigma^2_{AXA}$.

- Conditions d'application du test :

  petits échantillons ($n_{AGF} = n_{AXA} = 10$). Les prix des titres sont supposés normalement distribués.

- Hypothèses statistiques - Test unilatéral risque à droite.

$$\begin{cases} H_0 : m_{AGF} \leq m_{AXA} \\ H_1 : m_{AGF} > m_{AXA} \end{cases}$$

- Statistique de test : $\dfrac{(\overline{X}_{AGF} - \overline{X}_{AXA}) - (m_{AGF} - m_{AXA})}{\sqrt{\frac{s^{*2}_{AGF}}{n_{AGF}} + \frac{s^{*2}_{AXA}}{n_{AXA}}}} \mapsto T_{\nu\, d.d.l.}$

- Les données : $s^{*2}_{AGF} = \frac{n_{AGF}}{(n_{AGF}-1)} s^2_{AGF} = 0.049$; $s^{*2}_{AXA} = \frac{n_{AXA}}{(n_{AXA}-1)} s^2_{AXA} = 0.441$; $\alpha = 5\%$;

  écart moyen observé : $\overline{x}_{AGF} - \overline{x}_{AXA} = 29.83 - 26.97 = 2.86$

- Calcul du nombre de degrés de liberté ν : Expression de Welch-Satterthwaite :

$$\nu = \frac{\left(\frac{s^{*2}_{AGF}}{n_{AGF}} + \frac{s^{*2}_{AXA}}{n_{AXA}}\right)^2}{\frac{s^{*4}_{AGF}}{n^2_{AGF}(n_{AGF}-1)} + \frac{s^{*4}_{AXA}}{n^2_{AXA}(n_{AXA}-1)}} = \frac{\left(\frac{0.049}{10} + \frac{0.441}{10}\right)^2}{\frac{0.049^2}{10^2 \times 9} + \frac{0.441^2}{10^2 \times 9}} = 10.975$$

Exemple d'application 5 - Solution (4/4)

Comparaison de 2 moyennes - Variances : $\sigma^2_{AGF} \neq \sigma^2_{AXA}$.

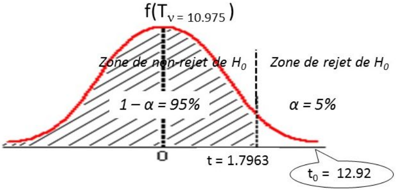
- Interpolation linéaire : fractile de la loi de Student à $\nu = 10.975$ d.d.l.

cf. Table de Student : $t_{(5\% \,;\, \nu=10\ d.d.l.)} = 1.8125$; $t_{(5\% \,;\, \nu=11\ d.d.l.)} = 1.7959$

$$\Rightarrow t_{(\alpha=5\% \,;\, \nu=10.975\ d.d.l.)} = 1.7963$$

- Calcul de la statistique de test sous H_0 : $m_{AGF} - m_{AXA} = 0 \Leftrightarrow m_{AGF} = m_{AXA}$

$$t_0 = \frac{(29.83 - 26.97) - 0}{\sqrt{\frac{0.049}{10} + \frac{0.441}{10}}} = 12.92$$



- Règle de décision et conclusion : vu que $t_0 = 12.92 > t_{5\%} = 1.7963$, t_0 appartient à la zone de rejet de H_0. L'écart observé de 2.86 € sur les prix moyens de ces titres est significatif, il n'est pas attribuable aux fluctuations d'échantillonnage.

On peut donc conclure avec un risque d'erreur de 5%, que le prix moyen du titre AGF est significativement plus grand que celui du titre AXA.

Valeur et probabilité critiques :

- En pratique les logiciels de statistique fournissent la valeur et la p-valeur associées à un test donné.
- La valeur (value en anglais) ou valeur critique désigne la valeur de la statistique de test calculée sous l'hypothèse nulle H_0.
- La p-valeur (p-value en anglais) ou probabilité critique associée à un test statistique :
  1. Test unilatétal risque à gauche : P(Stat. Test < valeur) = p-valeur
  2. Test bilatéral symétrique : P(| Stat. Test | > valeur) = p-valeur
  3. Test unilatétal risque à droite : P(Stat. Test > valeur) = p-valeur
- Rejet ou Non-Rejet de l'hypothèse nulle H_0 : il suffit de comparer la p-valeur fournie avec le seuil de signification ou risque d'erreur α choisi.
- Critère de décision : rejet de H_0 si p-valeur $\leq$ α.